

Merkzettel MA 1:

Nullstellen von Funktionen ermitteln

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">• grafische Methode | <ul style="list-style-type: none">(1) Graphen der Funktion f im zu betrachtenden Intervall (z.B. mittels einer Wertetabelle oder eines GTA) zeichnen.
Nullstelle ablesen als x-Koordinate des Schnittpunkts des Graphen mit der x-Achse(2) Funktionsterm f in zwei jeweils einfacher zu zeichnende Teile f_1 und f_2 so zerlegen, dass $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ gilt. Nullstelle von f ablesen als x-Koordinate des Schnittpunkts der Graphen von $y = f_1(x)$ und $y = -f_2(x)$. |
| <ul style="list-style-type: none">• rechnerische Methode (ohne GTA-Einsatz) | |
| a) f ist ganzrational | <p>Nullsetzen des Funktionsterms ergibt die Gleichung $f(x) = 0$.</p> <ul style="list-style-type: none">– Wenn Grad von $f(x)$ gleich 1 oder 2, dann Gleichung $f(x) = 0$ durch Umformen bzw. Anwenden der Lösungsformel lösen.– Wenn Grad von $f(x)$ größer als 2<ul style="list-style-type: none">• und x nur in den Potenzen 4 und 2 (6 und 3 ...) auftritt, dann Gleichung durch Substitution $x^2 = z$ (bzw. $x^3 = z$...) auf quadratische Gleichung zurückführen;• und Absolutglied gleich 0 ist, dann höchstmögliche Potenz von x ausklammern und verbleibenden Gleichungsteil lösen;• durch Probieren eine Nullstelle x_0 ermitteln (Probieren mit den Teilern des Absolutglieds beginnen) und $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ dividieren (Polynomdivision ↗ Lehrbuch, S. 16).
Ergebnis: $f(x) = (x - x_0) \cdot f_R$.• Weitere Nullstellen durch Untersuchen der Restfunktion f_R ermitteln.• Näherungsverfahren anwenden (↗ Lehrbuch, S. 199/200) |
| b) f ist gebrochenrational
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ | <p>Nullstellen x_0 der ganzrationalen Zählerfunktion u bestimmen. Wenn $v(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 Nullstelle von f.</p> |
| c) f ist nichtrational | <ul style="list-style-type: none">– Näherungsverfahren anwenden (↗ Lehrbuch, S. 199/200);– Umformen unter Verwendung der für die jeweilige Funktion zutreffenden Rechenregeln |

Merkzettel MA 2:

Funktionen/Funktionsgraphen auf Symmetrie untersuchen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

- f ist **gerade** und der Graph von f ist **achsensymmetrisch** zur y -Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt.
- f ist **ungerade** und der Graph von f ist **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Merkzettel MA 3:

Schnittpunkte von Funktionsgraphen ermitteln

- **Schnittpunkte** mit den Koordinatenachsen

- | | |
|------------------------|--|
| – grafische Methode | Graphen der Funktion mithilfe von Wertetabelle oder GTA zeichnen; Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen ablesen (Näherungswerte): $S_x(x_s; 0); S_y(0; y_s)$. |
| – rechnerische Methode | Schnittpunkte mit der x-Achse: Funktionsterm gleich 0 setzen; Lösungen der entstehenden Gleichung (↗ MA 1) sind die Abszissen der gesuchten Schnittpunkte; Ordinate ist jeweils 0. |

- **Schnittpunkte** der Graphen beliebiger, durch ihre Gleichungen gegebener Funktionen

- | | |
|------------------------|---|
| – grafische Methode | Graphen der Funktion mithilfe von Wertetabelle oder GTA zeichnen; Koordinaten der Schnittpunkte ablesen (Näherungswerte) |
| – rechnerische Methode | Funktionsterme gleich setzen; Lösungen der entstehenden Gleichung (↗ MA 1) sind die Abszissen der gesuchten Schnittpunkte; durch Einsetzen dieser Werte in eine der beiden Funktionsgleichungen die zugehörigen Schnittpunktsordinaten ermitteln. |

Merkzettel MA 4:

Gebrochenrationale Funktionen an Definitionslücken untersuchen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gegeben.

• Definitionslücken	Berechne die Nullstellen x_0 der Nennerfunktion v . a) Hebbare Definitionslücken von f Überprüfe, ob auch $u(x_0) = 0$ gilt. Wenn ja, so zerlege $u(x)$ und $v(x)$ in Linearfaktoren und kürze die gemeinsamen Linearfaktoren heraus. Für die entstehende (neue) Funktion f^* ist x_0 keine Definitionslücke mehr. b) Definitionslücke ist Polstelle von f . Wenn $u(x_0) \neq 0$ gilt, so sind die x_0 die Polstellen von f .
• Pol(stelle) mit/ohne Vorzeichenwechsel (VZW)	c) Wenn die Funktionswerte $f(x)$ bei Annäherung an die Polstellen von links oder rechts stets gegen $+\infty$ (stets gegen $-\infty$) streben, dann liegt ein Pol ohne VZW vor. d) Wenn die Funktionswerte $f(x)$ bei Annäherung an die Polstellen von links gegen $+\infty$ und bei Annäherung von rechts gegen $-\infty$ (oder umgekehrt) streben, dann liegt ein Pol mit VZW vor..
• Aufstellen der Gleichung der Polgeraden (senkrechten Asymptote)	Wenn x_0 eine Polstelle von f ist, dann ist $x = x_0$ die Gleichung der Polgeraden , einer Parallelen zur y -Achse durch x_0 .

Merkzettel MA 5:

Funktionen verketteten

Funktionen f und g seien durch ihre Gleichungen $y = f(x)$ bzw. $y = g(x)$ gegeben.

- **Verkettung** $f \circ g$
(*f nach g*)
(↗ [Lehrbuch, Abschnitt A 5](#))
Zunächst g auf x anwenden – man erhält $g(x)$.
Dann f auf $g(x)$ anwenden – man erhält $f(g(x))$.
- **Verkettung** $g \circ f$
(*g nach f*)
Zunächst f auf x anwenden – man erhält $f(x)$.
Dann g auf $f(x)$ anwenden – man erhält $g(f(x))$.
Merke: Im Allgemeinen ist $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Merkzettel MA 6:

Funktionen umkehren / Umkehrfunktion bzw. inverse Funktion bilden

Die Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Ausgangsfunktionsgleichung
$y = f(x)$
(↗ Lehrbuch, S. 32) | <ul style="list-style-type: none">– D_f und W_f bestimmen– Prüfen, ob f eine umkehrbar eindeutige Zuordnung darstellt.
Wenn nicht, dann Eineindeutigkeit durch geeignete Einschränkung/Aufteilung von D_f herzustellen versuchen.– Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen; man erhält $x = f^{-1}(y)$, die Umkehrfunktion von f. |
| <ul style="list-style-type: none">• Übliche Variablenbezeichnung herstellen | <ul style="list-style-type: none">– Bezeichnung y und x formal vertauschen; man erhält $y = f^{-1}(x)$.
Es ist $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$ |

Merkzettel MA 7:

Funktionen umkehren/ Umkehrfunktion bzw. inverse Funktion bilden

Die Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Ausgangsfunktionsgleichung
$y = f(x)$
(↗ Lehrbuch, S. 32) | <ul style="list-style-type: none">– D_f und W_f bestimmen– Prüfen, ob f eine umkehrbar eindeutige Zuordnung darstellt.
Wenn nicht, dann Eineindeutigkeit durch geeignete
Einschränkung/Aufteilung von D_f herzustellen versuchen.– Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen; man erhält $x = f^{-1}(y)$, die
Umkehrfunktion von f. |
| <ul style="list-style-type: none">• Übliche Variablen-
bezeichnung herstellen | <ul style="list-style-type: none">– Bezeichnung y und x formal vertauschen; man erhält $y = f^{-1}(x)$.
Es ist $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$ |

Merkzettel MB 1:

Bildungsvorschriften für Zahlenfolgen angeben/aufschreiben

rekursiv	Gleichung angeben, welche die Berechnung eines beliebigen Folgengliedes a_{k+1} aus dem Vorgänger a_k unter Kenntnis des Anfangsgliedes a_1 gestattet.
explizit	Gleichung für das allgemeine Glied a_n der Zahlenfolge angeben, welche die Berechnung eines beliebigen Folgengliedes in Abhängigkeit von der Platznummer n gestattet.

Merkzettel MB 2:

Prüfen, ob eine arithmetische oder geometrische Zahlenfolge vorliegt

Differenz d		Quotient q
mehrerer Paare aufeinander folgender Glieder a_{k+1} und a_k bilden. Ergibt sich stets		
der gleiche Wert d ,		der gleiche Wert q ,
so <i>kann</i> es sich um eine		
arithmetische Zahlenfolge ,		geometrische Zahlenfolge ,
handeln.		

Um zu einer sicheren Aussage zu gelangen, ist – falls durchführbar – eine Untersuchung *aller* Paare (für endliche Zahlenfolgen) bzw. ein allgemeiner Beweis erforderlich.

Merkzettel MB 3:**Bildungsvorschriften für spezielle Zahlenfolgen angeben/ermitteln**

Bildungsvorschriften angeben, wenn Zahlenfolgen als arithmetisch bzw. geometrisch erkannt wurden:

	arithmetische Zahlenfolgen ($n \in \mathbb{N}^*$)	geometrische Zahlenfolgen ($n \in \mathbb{N}^*$)
rekursiv	$a_{n+1} = a_n + d; a_1 = c$	$a_{n+1} = a_n \cdot q; a_1 = c$
explizit	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Merkzettel MB 4:
Zahlenfolgen auf Monotonie untersuchen

	Bilde die Differenz $a_{n+1} - a_n$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$).
(a_n) monoton wachsend	Prüfe, ob $a_{n+1} - a_n \geq 0$ für alle n .
(a_n) monoton fallend	Prüfe, ob $a_{n+1} - a_n \leq 0$ für alle n .

	Bilde die Differenz $a_{n+1} - a_n$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$).
(a_n) streng monoton wachsend	Prüfe, ob $a_{n+1} - a_n > 0$ für alle n .
(a_n) streng monoton fallend	Prüfe, ob $a_{n+1} - a_n < 0$ für alle n .

speziell:

	arithmetische Zahlenfolge	geometrische Zahlenfolge
streng monoton wachsend	$d > 0$	$a_1 > 0$ und $q > 1$ oder $a_1 < 0$ und $0 < q < 1$
streng monoton fallend	$d < 0$	$a_1 > 0$ und $0 < q < 1$ oder $a_1 < 0$ und $q > 1$

Merkzettel MB 5:

Zahlenfolgen auf Beschränktheit untersuchen

	Suche reelle Zahlen s mit der Eigenschaft:
(a_n) nach oben beschränkt	$a_n \leq s$ für alle n (s ist eine obere Schranke von (a_n))
(a_n) nach unten beschränkt	$a_n \geq s$ für alle n (s ist eine untere Schranke von (a_n))

Merkzettel MB 6:

Partialsummen von Zahlenfolgen bilden

Zahlenfolge $(a_n) = (a_1; a_2; a_3; \dots a_n)$

Partialsumme	Bildung der Partialsumme
s_1	$s_1 = a_1$
s_2	$s_2 = a_1 + a_2$
s_3	$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
\vdots	\vdots
s_n	$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Partialsummenfolge

$(s_n) = s_1; s_2; s_3; \dots; s_n$

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Merkzettel MB 7:**Partialsummen einer arithmetischen Zahlenfolge bestimmen**

Bilde: $s_n = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1) \cdot d) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1) \cdot d}{2}$

([↗](#) Lehrbuch, Satz B 2)

Merkzettel MB 8:**Partialsummen einer geometrischen Zahlenfolge bestimmen**

Bilde: $s_n = \sum_{k=1}^n a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$

([↗](#) Lehrbuch, Satz B 4)

Merkzettel MB 9:

Untersuchen, ob eine Zahl g Grenzwert einer gegebenen Zahlenfolge (a_n) ist

Weg 1:

(1) Bilde: $|a_n - g|$

(2) Zeige: $|a_n - g| < \varepsilon$ für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ für fast alle n ([↗ Lehrbuch, S. 56, Fußnote](#)).

Weg 2:

Zeige, dass die Zahlenfolge $(a_n - g)$ eine Nullfolge ([↗ Lehrbuch, Abschnitt B 2.2](#)) ist!

Merkzettel MB 10:

Grenzwerte von Zahlenfolgen mithilfe der Grenzwertsätze bestimmen (Grundstrategie)

- (1) Versuche, die Zahlenfolgen in *eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder einen Quotienten* (einfacherer) Zahlenfolgen zu zerlegen.
- (2) Prüfe, ob die Grenzwerte der einzelnen Folgen existieren!
- (3) Wende die Grenzwertsätze an! (↗ [Lehrbuch, S. 60/61](#))

Zusatz:

Liegt ein Quotient zweier Folgen vor, ist es oft notwendig und zweckmäßig, zunächst die höchste im Nenner vorkommende Potenz von n im Zähler und Nenner auszuklammern, zu kürzen und dann die Grenzwertsätze anzuwenden.

Merkzettel MB 11:

Spezielle Reihen auf Konvergenz untersuchen

- (1) Arithmetische Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 + (k-1)d)$$

stets **divergent** ([↗ Lehrbuch, S. 64](#))

- (2) Geometrische Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1}$$

Konvergenzverhalten ist von q abhängig.
([↗ Lehrbuch, S. 64](#)):

- $|q| \geq 1$: Reihe ist **divergent**.
- $|q| < 1$: Reihe ist **konvergent**..

Merkzettel MB 12:

Summe einer geometrischen Reihe ermitteln

Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1}$$

$$|q| < 1$$

Für die Summe s der Reihen gilt: $s = \frac{a_1}{1-q}$

Merkzettel MC 1:

Funktionen auf Monotonie/Monotonieverhalten untersuchen

Weg 1: (↗ [Lehrbuch, Abschnitt C 1](#))

	Beliebige $x_1, x_2 \in D_f$ wählen und die entsprechenden Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ vergleichen.
monoton wachsend	Wenn $x_1 < x_2$, dann muss gelten: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
monoton fallend	Wenn $x_1 < x_2$, dann muss gelten: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Weg 2: (↗ [Lehrbuch, Abschnitt D 5.1](#))

	$f'(x)$ bilden
monoton wachsend	$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in D_f$ bzw. $x \in I$
monoton fallend	$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in D_f$ bzw. $x \in I$
strenge Monotonie	statt „ \geq / \leq “ muss bei Weg (1) und Weg (2) die echte Ungleichheitsbeziehung „ $<$ “ bzw. „ $>$ “ gelten.

Merkzettel MC 2:

Funktionen auf Beschränktheit untersuchen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none">• f ist nach oben beschränkt
(↗ Lehrbuch, Abschnitt C 1)• f ist nach unten beschränkt
(↗ Lehrbuch, Abschnitt C 1) | <p>Es ist zu untersuchen, ob eine Zahl $s_o \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in D_f$ gilt:
$f(x) \leq s_o$</p> <p>Es ist zu untersuchen, ob eine Zahl $s_u \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in D_f$ gilt:
$f(x) \geq s_u$</p> |
|--|---|

Merkzettel MC 3:

Grenzwert einer Funktion an einer Stelle ermitteln

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Weg (1): Auf der Grundlage von Definition C 3 ([↗ Lehrbuch, S. 69](#))

- Vermutung über möglichen Grenzwert g aufstellen,
- beliebige Folgen (x_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ auswählen
- Zeigen, dass die Folge $(f(x_n) - g)$ Nullfolge ist.

Weg (2): Anwenden der Grenzwertsätze ([↗ Lehrbuch, Satz C 3](#))

Wenn f eine zusammengesetzte Funktion ist (Summe, Differenz, Produkt oder Quotient von Funktionen u und v), dann läßt sich aus der Kenntnis der Einzelgrenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ auf $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ schließen.

Weg (3): h-Methode

- beliebige Folge (h_n) auswählen, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$
- untersuchen, ob unabhängig von (h_n) : $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = g$

Weg (4): Grenzwert einer Funktion für x gegen x_0 ermitteln

GTA einsetzen ([↗ Lehrbuch, Beispiel C 12](#))

Merkzettel MC 4:

Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$ ermitteln

([↗](#) [Merkzettel MD 11–13](#))

Merkzettel MC 5:

Stetigkeit von Funktionen untersuchen (Grundstrategie)

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Arbeitsschritte:

- (1) Feststellen, ob f an der Stelle x_0 definiert ist; $f(x_0)$ bestimmen
- (2) Prüfen, ob der Grenzwert von f an der Stelle x_0 , also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, existiert
- (3) Vergleichen von Grenzwert und Funktionswert $f(x_0)$
- (4) Wenn Übereinstimmung besteht, dann ist f in x_0 **stetig**.

Merkzettel MD 1:

Differenzenquotient einer Funktion an einer Stelle berechnen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Differenzenquotient d an der Stelle x_0 ([↗ Lehrbuch Abschnitt D 1.1](#)):

(1) Berechne $f(x_0 + h)$ und $f(x_0)$ oder

(1) Berechne $f(x)$ und $f(x_0)$

(2) Bilde $d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

(2) Bilde $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Merkzettel MD 2:

Ableitung einer Funktion über den Differenzenquotienten bilden

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Ableitung f' an der Stelle x_0 ([↗ Lehrbuch Abschnitt D 1.1](#)):

- (1) Ermittle den Differenzenquotienten $d(h)$ an der Stelle x_0 ([↗ MD 1](#))
- (2) Berechne den Grenzwert von $d(h)$ für $h \rightarrow 0$:
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

- (1) Ermittle den Differenzenquotienten $d(x)$ an der Stelle x_0 ([↗ MD 1](#))
- (2) Berechne den Grenzwert von $d(x)$ für $x \rightarrow x_0$:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Merkzettel MD 3:

Gleichung der Tangente in einem Punkt an einen Funktionsgraphen aufstellen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben. Die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ an den Graphen von f ist aufzustellen ([↗ Lehrbuch, S. 84](#)).

- (1) Ableitung f' der Funktion f bilden: $y' = f'(x)$
- (2) Wert der Ableitung f' an der Stelle x_0 , also den Anstieg m von f in P_0 berechnen: $m = \tan \alpha = f'(x_0)$
- (3) **Gleichung der Tangente** in P_0 : $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ ([auch ↗ MG 8](#))

Merkzettel MD 4:

Ableitungen von Funktionen mithilfe von Ableitungsregeln ermitteln

(1) Allgemeine Regeln ([↗ Lehrbuch, Abschnitt D 2](#))

Konstantenregel	Wenn $f(x) = c$, dann $f'(x) = 0$
Faktorregel	Wenn $f(x) = k \cdot g(x)$, dann $f'(x) = k \cdot g'(x)$
Potenzregel	Wenn $f(x) = x^n$, dann $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$ bzw. für $x > 0$ $n \in \mathbb{R}$)
Summenregel	Wenn $f(x) = u(x) + v(x)$, dann $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel	Wenn $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, dann $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$
Quotientenregel	Wenn $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, dann $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$
Kettenregel	Wenn $f(x) = u(x) \circ v(x)$, dann $f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
Umkehrregel	Wenn $f^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist, dann $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$

(2) Spezielle Regeln ([↗ Lehrbuch, Abschnitt D 3](#))

Funktion	Ableitungsfunktion
$f(x) = a^x, \quad a > 0$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x, \quad a > 0; a \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x) = \log_e x = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

Merkzettel MD 5:

Grenzwert für den Quotienten zweier Funktionen bestimmen, wenn Grenzwertsätze zu 0/0 oder ∞/∞ führen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gegeben.

Wenn ...	dann
(1) $u(x_0) = v(x_0) = 0$ sowie $v'(x) \neq 0$ (in einer Umgebung von x_0)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$
(2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = 0$ sowie $v'(x) \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)}$
(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$ sowie $v'(x) \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$
(4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = \infty$ sowie $v'(x) \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)}$

(immer unter der Voraussetzung, dass $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ existiert)

Merkzettel MD 6:

Ableitungsbegriff / Ableitungen geometrisch oder praktisch interpretieren

Wichtigste **Grundvorstellung** vom Ableitungsbegriff:

- Ableitung als lokale Änderungsrate, genauer: als Grenzwert der mittleren Änderungsraten (Differenzenquotienten) von Größen an der betreffenden Stelle.
Beispiel: Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt als lokale (momentane) Änderungsrate des zurückgelegten Wegs in Bezug auf die Zeit.

Geometrische Interpretation des Ableitungsbegriffs:

- Ableitung als Steigung der Tangente an den Graphen der betreffenden Funktion (kurz: Steigung des Funktionsgraphen) an der betreffenden Stelle.

Bedeutet $f(x)$	dann bedeutet $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
<ul style="list-style-type: none">• die Ordinate eines Punktes auf dem Graphen einer differenzierbaren Funktion mit der Abszisse x,• den vom Start bis zum Zeitpunkt x zurückgelegten Weg,• die Einkommensteuer beim zu versteuernden Einkommen x,• das Volumen eines Körpers bis zur Höhe x,• das Integral $\int_a^x g(u)du$ einer Funktion g im Intervall $(a; x)$,	<ul style="list-style-type: none">• die Steigung der Tangente bzw. Steigung des Funktionsgraphen in diesem Punkt;• die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt;• den Grenzsteuersatz („Steuer für die letzte Mark“) bei diesem Einkommen;• den Querschnitt des Körpers in dieser Höhe;• den Funktionswert $g(x)$.

Merkzettel MD 7:

Lokale Extremstellen einer Funktion ermitteln

Die Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Weg (1): Vorzeichenwechsel-(VZW-)Kriterium anwenden (↗ [Lehrbuch, S. 116](#)):

Wenn $f'(x_E) = 0$ und an der Stelle x_E ein

- $(+/-)$ -VZW von $f'(x)$ erfolgt, dann liegt **lokales Maximum** vor.
- $(-/+)$ -VZW von $f'(x)$ erfolgt, dann liegt **lokales Minimum** vor.

Arbeitsschritte:

- (1) $f'(x)$ berechnen
- (2) Stellen x_E ermitteln, für die $f'(x_E) = 0$ gilt
- (3) Vorzeichen der 1. Ableitung für Argumente $x < x_E$ und für Argumente $x > x_E$ ermitteln
- (4) VZW-Kriterium zur Entscheidung anwenden

Weg (2): Verhalten der 1. und 2. Ableitung von f untersuchen (↗ [Lehrbuch, Satz D 21](#)):

Wenn $f'(x_E) = 0$ und an der Stelle x_E

- $f''(x_E) < 0$ gilt, dann ist x_E eine lokale Maximumstelle;
- $f''(x_E) > 0$ gilt, dann ist x_E eine lokale Minimumstelle.

Arbeitsschritte:

- (1) $f'(x)$ berechnen
- (2) Stellen x_E ermitteln, für die $f'(x_E) = 0$ gilt
- (3) Vorzeichen der 2. Ableitung an der Stelle x_E ermitteln
- (4) obiges Kriterium zur Entscheidung anwenden

Merkzettel MD 8:

Krümmungsverhalten einer Funktion / eines Funktionsgraphen untersuchen

Die Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

- f heißt in I **rechtsgekrümmt**, wenn $f''(x) < 0$.
- f heißt in I **linksgekrümmt**, wenn $f''(x) > 0$.

([↗ Lehrbuch, Definition D 4](#))

Arbeitsschritte:

- (1) 2. Ableitung bilden
- (2) Vorzeichen der 2. Ableitung für $x \in I$ untersuchen
- (3) obiges Kriterium anwenden

Merkzettel MD 9:

Wendestellen einer Funktion ermitteln

Die Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Weg (1): Vorzeichenwechselkriterium (VZW) auf 2. Ableitung anwenden ([↗ Lehrbuch, S. 122](#))

Wenn $f''(x_w) = 0$ und an der Stelle x_w eine $(+/-)$ - oder $(-/+)$ -VZW von $f''(x)$ erfolgt, dann ist x_w eine **Wendestelle** von f .

Arbeitsschritte:

- (1) $f''(x)$ berechnen
- (2) Stellen x_w ermitteln, für die $f''(x_w) = 0$ gilt
- (3) Vorzeichen der 2. Ableitung für Argumente $x < x_w$ und $x > x_w$ ermitteln
- (4) VZW-Kriterium zur Entscheidung anwenden

*Weg (2): Gilt $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$, so ist x_w **Wendestelle** von f .* ([↗ Lehrbuch, Satz D 23](#))

Arbeitsschritte:

- (1) $f''(x)$ berechnen
- (2) Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen
- (3) Vorzeichen der 3. Ableitung an diesen Stellen analysieren
- (4) Obiges Kriterium anwenden

Gilt außerdem $f'(x_w) = 0$, so hat f in x_w einen Sattelpunkt, Terrassenpunkt oder Horizontalwendepunkt.

Merkzettel MD 10:

Gleichungen der Wendetangenten aufstellen

Die Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Arbeitsschritte:

- (1) Wendestellen x_w von f ermitteln (↗ MD 9)
- (2) Anstieg $m = f'(x_w)$ des Graphen in den Wendestellen berechnen
- (3) Gleichung der **Wendetangenten** entsprechend ↗ MD 3 aufstellen: $y = m \cdot x + n$

Merkzettel MD 11:

Verhalten einer ganzrationalen Funktion im Unendlichen untersuchen

Eine Funktion sei durch ihre Gleichung $y = f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ gegeben

Grad des Funktionspolynoms n

gerade		ungerade	
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$
$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$

Merkzettel MD 12:

Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen untersuchen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ gegeben.

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Grad n von u < Grad m von v | <p>Für $x \rightarrow \pm \infty$ geht $f(x)$ gegen 0. Die x-Achse ist Asymptote des Graphen von f.</p> |
| <ul style="list-style-type: none">• $n = m$ | <p>Klammere $x^n = x^m$ in $u(x)$ bzw. $v(x)$ aus und bilde den Grenzwert g für $x \rightarrow \pm \infty$.
Für $x \rightarrow \pm \infty$ geht $f(x)$ gegen $g = \frac{a_n}{b_m}$. Die Gerade $y = g$ ist (eine waagerechte) Asymptote des Graphen von f.</p> |
| <ul style="list-style-type: none">• $n > m$ | <p>Durch Polynomdivision (↗ Lehrbuch, S. 16) $u(x) : v(x)$ die Funktionsgleichung von f in einen ganzrationalen Teil $g(x)$ und einen echt gebrochenen rationalen Teil $r(x)$ aufspalten: $f(x) = u(x) : v(x) = g(x) + r(x)$
Für $x \rightarrow \pm \infty$ geht $f(x)$ gegen $g(x)$. Der Graph von f nähert sich asymptotisch dem Graphen von g.
In Abhängigkeit vom Verlauf von g gilt:
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = +\infty \text{ oder } -\infty \text{ oder } \pm \infty \text{ oder } \mp \infty$</p> |

Merkzettel MD 13:

Verhalten einer nichtrationalen Funktion im Unendlichen untersuchen

Weg (1):

- Vermutung zum Verhalten im Unendlichen durch Darstellung des Graphen (ggf. mit GTA) gewinnen oder (wenn möglich)
- Funktionsterm umformen / aufspalten, so dass Grenzwertsätze anwendbar

Weg (2):

Regel von de l'Hospital anwenden bzw. mit Computeralgebraprogramm arbeiten

Spezielle Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

Merkzettel MD 14:

Unstetigkeitsstellen von gebrochenrationalen Funktionen analysieren

Die gebrochenrationale Funktion f sei durch ihre Gleichung $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gegeben.

Polstellen

(↗ [Lehrbuch, S. 18/19, 126/127](#))

(nicht hebbare Unstetigkeitsstellen)

bei x_0 , wenn $v(x_0) = 0$ und $u(x_0) \neq 0$

Arbeitsschritte:

- (1) Nullstellen x_0 des Nennerpolynoms ermitteln
- (2) Prüfen, ob das Zählerpolynom an den Stellen x_0 ungleich 0 ist

Polasymptote(n) $x = x_0$

Es gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$

Lücken

(↗ [MA 4](#) und [Lehrbuch, S. 18/19, 128](#))

(hebbare Unstetigkeitsstellen)

bei x_0 , wenn $v_1(x_0) \neq 0$ nach folgender Umformung:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{(x - x_0)^m \cdot u_1(x)}{(x - x_0)^m \cdot v_1(x)} = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$$

Arbeitsschritte:

- (1) Stellen x_0 ermitteln, die sowohl (m-fache) Nullstellen der Zählerpolynoms $u(x)$ als auch des Nennerpolynomss $v(x)$ sind
- (2) Kürzen des Funktionsterms mit $(x - x_0)^m$ und prüfen, ob $v_1(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{u_1(x_0)}{v_1(x_0)}$$

Merkzettel MD 15:

Unstetigkeitsstellen von nichtrationalen Funktionen analysieren

Die nichtrationale Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Polstellen

Analysieren, für welche x_0 gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty \text{ oder } -\infty$$

Gegebenenfalls dazu Graphen von f mit GTA zeichnen

Lücken

Analysieren, an welchen Stellen x_0 die Funktion nicht definiert ist, obwohl $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert.

Gegebenenfalls dazu Graphen von f mit GTA zeichnen

Merkzettel MD 16:

Vollständige Funktionsuntersuchung / Kurvendiskussion durchführen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Arbeitsschritte ([↗ Lehrbuch, Abschnitt D 5.6](#))

- (1) Bestimmen des (größtmöglichen) Definitionsbereichs
- (2) Untersuchen auf Symmetrieeigenschaften ([↗ MA 2](#))
- (3) Untersuchen des Verhaltens im Unendlichen (Ermitteln der Asymptoten) ([↗ MD 11–13](#))
- (4) Untersuchen auf Stetigkeit / Unstetigkeit ([↗ MA 4, MD 14](#))
- (5) Bestimmen der Nullstellen ([↗ MA 1](#))
- (6) Ermitteln der Schnittpunkte mit der y-Achse
- (7) Berechnen der lokalen Extrempunkte ([↗ MD 7](#))
- (8) Ermitteln der Wendepunkte, ggf. auch der Wendetangenten ([↗ MD 9, MD 10](#))
- (9) Zeichnen des Graphen

Merkzettel MD 17:

Ortskurven (z. B. der Extrem- oder Wendepunkte einer Kurvenschar) aufstellen

Eine Funktionen-/Graphenschar (↗ [Lehrbuch, Abschnitt A 6](#)) sei durch ihre Gleichung / Gleichungsschar $y = f_a(x)$ gegeben.

Mögliche Schrittfolge für das Aufstellen der Gleichung einer Ortskurve für die Maximumpunkte (↗ [MD 7](#)) der Graphenschar:

- (1) $y' = f'_a(x)$ und $y'' = f''_a(x)$ bilden
- (2) Koordinaten des Maximumpunktes in Abhängigkeit vom Scharparameter a bestimmen: $\text{Max}(x(a); y(a))$
- (3) $x(a)$ nach a auflösen; man erhält $a = a(x)$
- (4a) In $y(a)$ die Variable a durch $a(x)$ ersetzen; man erhält $y = m(x)$ als Gleichung der Ortskurve der Maximumpunkte

oder

- (4b) In $y = f_a(x)$ die Variable a durch $a(x)$ ersetzen

Merkzettel MD 18:

Extremwertprobleme lösen (Schrittfolge)

Die Lösungswege für (praktische) Extremwertprobleme können sich in Abhängigkeit von der konkreten Situation wesentlich unterscheiden. Nachfolgend wird nur eine mögliche – in vielen Fällen nutzbare – Schrittfolge angegeben. ([↗ Lehrbuch, Abschnitt F 3](#))

- (1) Aufgabensachverhalt analysieren; ggf. durch Skizze veranschaulichen
- (2) Zielfunktion $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ aufstellen, in der z die Größe ist, welche einen Extremwert annehmen soll. Es können mehrere (n) unabhängige Variable x_i auftreten.
- (3) Nebenbedingungen ermitteln / aufschreiben, d. h., sich aus dem Sachverhalt ergebende Zusammenhänge zwischen den x_i bestimmen
- (4) Unter Nutzung der Nebenbedingungen (Substitution) die Zielfunktion z als Funktion (genau) einer unabhängigen Variablen x schreiben
- (5) Definitionsbereich von $z = z(x)$ sinnvoll (d. h. dem Sachverhalt entsprechend) festlegen
- (6) 1. und 2. Ableitung von $z = z(x)$ bilden
- (7)/(8) Lokale / globale Extrema von $z = z(x)$ berechnen ([↗ Merkzettel MD 7](#))
- (9) Rechnerisch erhaltenen Wert x_E mit Bezug auf den Sachverhalt interpretieren / überprüfen; unter Verwendung der Nebenbedingungen die entsprechenden Werte der anderen Variablen sowie den Extremwert von z berechnen.

Merkzettel ME 1:

Unbestimmte Integrale über Umkehrung der Differentiation ermitteln

(1) Funktionsterm so umformen, dass die Summen-, Faktor- bzw. Potenzregel angewendet werden kann (↗ Lehrbuch, Abschnitt E 1.2)	Summenregel $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
	Faktorregel $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$
	Potenzregel $\int x^q dx = \frac{1}{q+1} x^{q+1} + C \quad (q \neq -1)$
(2) Integrationsregeln anwenden; Grundintegrale beachten; Integrationskonstante C anfügen	$\int f(x) dx = F(x) + C$
(3) Probe durch Differentiation durchführen	$F'(x) = f(x)$

Merkzettel ME 2:

Bestimmte Integrale mittels Ober- und Untersummen berechnen

(1) Integrationsintervall $[a; b]$ in n gleich lange Teilintervalle zerlegen (↗ Lehrbuch, Abschnitt E 2.1)	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	
(2) Den größten bzw. den kleinsten Funktionswert in jedem Teilintervall bestimmen	$f(\bar{x}_i)$	bzw. $f(\underline{x}_i)$
(3) Obere und untere Rechtecksumme berechnen	$s_n = \sum_{i=1}^n f(\underline{x}_i) \cdot \Delta x;$	$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$
(4) Grenzwerte (↗ MC 3) der Ober- bzw. der Untersumme bilden und auf Übereinstimmung prüfen	$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = g;$	$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = g$
(5) Den gemeinsamen Grenzwert als bestimmtes Integral über $[a; b]$ interpretieren	$\int_a^b f(x) \, dx = g$	

Merkzettel ME 3:

Bestimmte Integrale mittels Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermitteln

(1) Eine Stammfunktion $F(x)$ des Integranden $f(x)$ ermitteln	$\int f(x) \, dx = F(x)$
(2) Werte der Stammfunktion $F(x)$ an der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals ermitteln	$F(b)$ und $F(a)$
(3) Differenz bilden	$F(b) - F(a)$
(4) Differenz als Wert des bestimmten Integrals interpretieren (↗ Lehrbuch, Satz E 10)	$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Merkzettel ME 4:

Inhalt der Fläche unter dem Graphen einer Funktion berechnen

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

- | | |
|--|---|
| <p>(1) Nullstellen der Integrandenfunktion f berechnen und überprüfen, ob (die) Nullstellen im Integrationsintervall $[a; b]$ liegen</p> <p>(2) Die bestimmten Integrale von f zwischen zwei benachbarten Nullstellen x_i bzw. zwischen der jeweils vorgegebenen Integrationsgrenze und der benachbarten Nullstelle berechnen
(↗ Lehrbuch, Abschnitt E 4.2, S. 161–164)</p> <p>(3) Summe der Beträge der bestimmten Integrale bilden</p> | <p>$f(x) = 0 \rightarrow x_0 \quad a < x_0 < b$</p>
<p>$A_i = \left \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx \right \quad \text{bzw.}$</p> <p>$A_1 = \left \int_a^{x_1} f(x) \, dx \right ; \dots; A_n = \left \int_{x_{n-1}}^b f(x) \, dx \right$</p>
<p>$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$</p> |
|--|---|

Merkzettel ME 5:

Inhalt der Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen berechnen

Die Funktionen f und g seien durch ihre Gleichungen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ gegeben.

- (1) Abszissen der Schnittpunkte der Graphen von f und g ermitteln

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x_1; x_2; \dots; x_n$$

- (2) Bestimmte Integrale aus der Differenzfunktion $f - g$ zwischen je zwei benachbarten Schnittpunkts-Abszissenwerten berechnen

([↗ Lehrbuch, Abschnitt E 4.2, S. 164–167](#))

$$A_1 = \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] \, dx \right|$$

$$A_2 = \left| \int_{x_2}^{x_3} [f(x) - g(x)] \, dx \right|$$

\vdots

- (3) Summe der Beträge dieser bestimmten Integrale berechnen

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Merkzettel ME 6:

Unbestimmte Integrale durch partielle Integration ermitteln

- (1) Verfahren der **partiellen Integration** anwenden, wenn der Integrand als ein Produkt von Funktionen aufgefasst werden kann, von denen der eine Faktor ($u(x)$) differenziert und der zweite ($v'(x)$) integriert werden kann ([↗ Lehrbuch, Abschnitt E 5.3](#))

- (2) Faktor $u(x)$ differenzieren; Faktor $v'(x)$ integrieren

- (3) Produkt der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ bilden, das Restintegral berechnen und entsprechend nebenstehender Formel zusammenfassen

- (4) Gegebenenfalls das Verfahren zur Berechnung des Restintegrals wiederholen

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx$$

$$v'(x) = \quad \rightarrow v(x) =$$

$$u(x) = \quad \rightarrow u'(x) =$$

$$= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Merkzettel ME 7:

Unbestimmte Integrale durch lineare Substitution ermitteln

- (1) Verfahren der **linearen Substitution** anwenden, wenn der Integrand eine verkettete Funktion mit einer linearen Funktion z als innerer Funktion ist ([↗ Lehrbuch, Abschnitt E 5.1](#))

- (2) Substitution vornehmen

- (3) Erhaltenes Integral berechnen und Rücksubstitution vornehmen

$$\int v(mx + n) dx$$

$$z = mx + n; \quad dx = \frac{1}{m} \cdot dz$$

$$\int v(mx + n) dx = \frac{1}{m} \int v(z) dz = \frac{1}{m} F(mx + n) + C$$

Alternative:

Sofort Satz E 12 ([↗ Lehrbuch, S. 168](#)) anwenden.

Merkzettel ME 8:

Unbestimmte Integrale durch nichtlineare Substitution ermitteln

- (1) Verfahren anwenden, wenn der Integrand das Produkt aus einer verketteten Funktion und der Ableitung ihrer inneren Funktion ist

Weg 1:

- (2) Sofort Formel [↗ Lehrbuch, Satz E 13](#) anwenden

Weg 2:

- (2) **Substitution** vornehmen: $z = u(x)$; $dx = \frac{dz}{u'(x)}$

- (3) Entstehendes Integral $\int v(z) dz$ berechnen und Rücksubstitution vornehmen

$$\int v(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

$$\int v(u(x)) \cdot u'(x) dx = V(u(x)) + C$$

$$\begin{aligned} \int v(u(x)) \cdot u'(x) dx &= \int v(z) \cdot u'(x) \cdot \frac{dz}{u'(x)} \\ &= \int v(z) dz \end{aligned}$$

Merkzettel ME 9:

Unbestimmte Integrale durch Partialbruchzerlegung ermitteln

- (1) Verfahren der **Partialbruchzerlegung** anwenden, wenn der Integrand eine gebrochenrationale Funktion ist (↗ [Lehrbuch, Abschnitt E 5.4](#))
- (2) Liegt eine echt gebrochenrationale Integrandenfunktion ($n < m$) vor, diese in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen. Dazu die Nullstellen der Nennerfunktion v berechnen und $v(x)$ entsprechend (↗ [Lehrbuch, Satz A 1](#)), als Produkt schreiben. (Der Lösungsansatz für die Partialbruchzerlegung ist davon abhängig, ob die Nennerfunktion einfache oder mehrfache, reelle oder komplexe Nullstellen besitzt.)
- (3) Zähler A_i der Zerlegung bestimmen (↗ [Lehrbuch, Beispiel E 29](#))
- (4) Partialbrüche summandenweise integrieren
- (5) Liegt eine unecht gebrochenrationale Funktion f ($n \geq m$) vor, diese vor der Partialbruchzerlegung durch Partialdivision (↗ [Lehrbuch, S. 16](#)) in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegen. Auf den echt gebrochenrationalen Summanden die Partialbruchzerlegung anwenden.

$$\int \frac{u(x)}{v(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} dx$$

Für jede einfache reelle Nullstelle x_i der Nennerfunktion ein Glied der Form

$$\frac{A_i}{x - x_i}$$

in den Lösungsansatz aufnehmen.

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_m}{x - x_m}$$

(Die hier als Beispiel angegebene Zerlegung gilt für den Fall, dass v genau m einfache, reelle Nullstellen besitzt.)

$$\int \frac{u(x)}{v(x)} dx = \int \frac{A_1}{x - x_1} dx + \dots + \int \frac{A_m}{x - x_m} dx$$

$$f(x) = g(x) + \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$$

Merkzettel ME 10:

Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall berechnen

Zu berechnen sind die Integrale $\int_a^\infty f(x) \, dx$, $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$ und $\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx$ (↗ [Lehrbuch, Abschnitt E 6.3](#)).

Arbeitsschritte:

- (1) Integral für ein endliches Integrationsintervall berechnen

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b$$

- (2) Grenzwert für die jeweilige **unbeschränkte Integrationsgrenze** berechnen

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx = \quad \text{oder} \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx =$$

$$\text{oder} \quad \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) \, dx =$$

- (3) Existiert ein Grenzwert g, so ist g der Wert des uneigentlichen Integrals mit unbeschränktem Integrationsintervall

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx = g$$

Merkzettel ME 11:

Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden berechnen

Die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ möge im Integrationsintervall eine Polstelle x_p besitzen ([↗ Lehrbuch, Abschnitt E 6.3](#)).

Arbeitsschritte:

(1) Polstelle im Integrationsintervall $[a; b]$ berechnen	Polstelle $x_p = c$ mit $a \leq c \leq b$
(2) Integrationsgrenzen rechtsseitig und linksseitig der Polstelle annähern	$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$ und $\int_{c+\delta}^b f(x) dx$
(3) Integrale berechnen	
(4) Grenzwerte berechnen	$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$ und $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$
(5) Summe der Grenzwerte bilden	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$

Merkzettel MF 1:

Lineare Näherungsfunktion für eine Funktion ermitteln

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Aufstellen der Gleichung für eine **lineare Näherungsfunktion** ([↗ Lehrbuch, S. 180](#))

- Voraussetzung:
Zwei Stützstellen x_1 und x_2 mit den Stützwerten $f(x_1)$ und $f(x_2)$ sind bekannt.
- Bestimmen der Koeffizienten a und b in der Näherungsfunktion $f^*(x) = ax + b$ durch Lösen des Gleichungssystems
$$f(x_1) = ax_1 + b$$
$$f(x_2) = ax_2 + b$$

Merkzettel MF 2:

Interpolationspolynom/ Näherungspolynom für eine Funktion ermitteln

Eine Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Aufstellen der Gleichung für das

Interpolationspolynom p

(↗ [Lehrbuch, Beispiel F 1 und S. 181/182](#))

- Voraussetzung:
($n + 1$) Stützstellen x_i mit den zugehörigen Stützwerten $f(x_i)$ sind bekannt.
- Polynomansatz
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
- Bestimmen der Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n durch Lösen des aus ($n + 1$) Gleichungen bestehenden linearen Gleichungssystems:
$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ f(x_1) &= a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 \\ &\vdots \\ f(x_n) &= a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 \end{aligned}$$

Merkzettel MF 3:

Ganzrationale Funktion an der Stelle 0 nach TAYLOR entwickeln

Die ganzrationale Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ sei gegeben.

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ **nach TAYLOR zu entwickeln**
(↗ Lehrbuch, Beispiele F 5, F 6)

Arbeitsschritte:

- (1) Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ bilden
(↗ MD 4)
- (2) $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots, f^{(n)}(0)$ ermitteln
- (3) **Gleichung für das n-te TAYLORSche Polynom** von f nach Satz F 3 (↗ Lehrbuch, S. 184) aufstellen:

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Merkzettel MF 4:

Ganzrationale Funktion an einer beliebigen Stelle nach TAYLOR entwickeln

Die ganzrationale Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ sei gegeben.

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ist an einer beliebigen Stelle x_0 **nach TAYLOR zu entwickeln**

(↗ [Lehrbuch, Beispiele F 5, F 6](#))

Arbeitsschritte:

(1) Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ bilden
(↗ [MD 4](#))

(2) $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ ermitteln

(3) **Gleichung für das n-te TAYLORSche Polynom** von f nach Satz F 3 (↗ [Lehrbuch, S. 184](#)) aufstellen:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

(4) TAYLOR-Polynom ggf. umformen/vereinfachen

Merkzettel MF 5:

Näherungspolynome für beliebige Funktionen mithilfe der TAYLORSchen Formel aufstellen

Eine beliebige Funktion f sei durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben.

Die Funktion f ist an einer Stelle $x = x_0$

nach TAYLOR zu entwickeln

(↗ [Lehrbuch, Abschnitte F 1.3 und F 1.4](#))

Arbeitsschritte:

(1) $(n + 1)$ -mal differenzierbare Ableitungen
 $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ bestimmen

(2) $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ ermitteln

(3) **Gleichung des Näherungspolynoms** in der Umgebung von x_0 nach Satz F 4 (↗ [Lehrbuch, S. 188](#)) aufstellen:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

(4) Restglied

$$R_{n+1}(x) \text{ mit } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

(LAGRANGESche Form)

$(0 < \delta < 1)$ abschätzen (↗ [Lehrbuch, S. 189–191](#));

wenn $R_{n+1}(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert (↗ [MC 4](#)), ist $f(x)$ in eine TAYLOR-Reihe entwickelt.

Merkzettel MF 6:

Näherungsfunktion durch lineare Regression ermitteln

Für n Wertepaare $(x_i; y_i)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) ist eine lineare Näherungsfunktion $\hat{y} = ax + b$ zu ermitteln

(↗ Lehrbuch, Abschnitt F 1.5)

Gegeben sind die Messwertpaare

x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
y_1	y_2	y_3	\dots	y_n

Arbeitsschritte zur Bestimmung der Koeffizienten a und b (↗ Lehrbuch, S. 193 und Beispiel F 11)

(1) x_i^2 und $x_i \cdot y_i$ berechnen

(2) $\sum_{i=1}^n x_i$, $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ berechnen

(3) Anstieg a ermitteln:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

Absolutglied b ermitteln:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

(4) Werte für a und b in $\hat{y} = ax + b$ einsetzen

Merkzettel MF 7:

Ableitung einer Funktion anhand einer Wertetabelle näherungsweise ermitteln

Zu einer Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ gehören folgende Wertepaare:

x	x_0	x_1	\dots	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	\dots	x_{n-1}	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	\dots	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	\dots	y_{n-1}	y_n

Arbeitsschritte

zum **näherungsweisen Ermitteln von $f'(x_i)$** (↗ [Lehrbuch, S. 196/197](#)):

<p><i>Fall 1:</i> Der Abstand h zwischen benachbarten x-Werten (Stützstellen) ist <i>konstant</i>.</p>	$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h}$ $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad 0 < i < n$ $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_n - h)}{h} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$	<p>rechtsseitiger Differenzenquotient (↗ MD 1)</p> <p>beidseitiger Differenzenquotient</p> <p>linksseitiger Differenzenquotient</p>
<p><i>Fall 2:</i> Die Abstände der x-Werte (Stützstellen) in der Wertetabelle sind <i>nicht konstant</i>.</p>	$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ $f'(x_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad 0 < i < n$ $f'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$	<p>rechtsseitiger Differenzenquotient</p> <p>beidseitiger Differenzenquotient</p> <p>linksseitiger Differenzenquotient</p>

Merkzettel MF 8:

Bestimmtes Integral einer Funktion f in einem Intervall näherungsweise ermitteln

Für das **bestimmte Integral** im Intervall $[a; b]$ einer Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ soll ein **Näherungswert** bestimmt werden (↗ [Lehrbuch, S. 197/199](#)).

Arbeitsschritte:

- (1) Für die Funktion f wird eine Wertetabelle mit hinreichend großem $n \in \mathbb{N}$ und *konstantem Abstand* $h = \Delta x = x_{i+1} - x_i$, $i \in \mathbb{N}$, zwischen benachbarten Stützstellen aufgestellt.

x	x_0	x_1	...	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	...	x_{n-1}	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	...	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	...	y_{n-1}	y_n

(2a) Rechteckmethode (↗ Lehrbuch, S. 198/199)	$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n y_{i-1} =$ $\Delta x \cdot (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = \Delta x \cdot S_{R1}$	S_{R1} : Summe aller y-Werte der Tabelle ohne y-Wert am rechten Intervallende
	<p>oder</p> $\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n y_i =$ $\Delta x \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \Delta x \cdot S_{R2}$	S_{R2} : Summe aller y-Werte der Tabelle ohne y-Wert am linken Intervallende
(2b) Trapezmethode (↗ Lehrbuch, S. 198/199)	$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$ $= \Delta x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot S_{Rand} + S_{Mitte} \right)$	S_{Rand} : Summe des ersten und letzten y-Wertes der Wertetabelle S_{Mitte} : Summe aller y-Werte der Tabelle außer dem ersten und dem letzten.
(2c) SIMPSONSche Regel (↗ Lehrbuch, S. 198/199) Bedingung: Intervall $[a; b]$ wird in eine <i>gerade</i> Anzahl von Teilintervallen geteilt: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$	$\int_a^b f(x) dx \approx$ $\frac{\Delta x}{3} (y_0 + y_{2k} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}))$ $= \frac{\Delta x}{3} \cdot (S_{Rand} + 2 \cdot S_{gerade} + 4 \cdot S_{ungerade})$	S_{Rand} : Summe des ersten und letzten y-Wertes der Wertetabelle S_{gerade} : Summe aller y-Werte mit <i>geradzahligem</i> Index $S_{ungerade}$: Summe aller y-Werte mit <i>ungeradzahligem</i> Index

Merkzettel MF 9:

Nullstellen einer Funktion mittels des NEWTONschen Verfahrens näherungsweise ermitteln

Arbeitsschritte (↗ [Lehrbuch, S. 199/200](#)):

- (1) Anfangsnäherung bestimmen:

Aus einer grafischen Darstellung der Funktion eine hinreichend gute Anfangsnäherung x_1 für die zu ermittelnde Nullstelle x_0 ablesen. Andere Schätzverfahren sind ebenfalls möglich.

- (2) Iterationsformel für die zu untersuchende Funktion f aufstellen:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}, \quad i > 0, \quad f'(x_i) \neq 0$$

- (3) Schrittweise annähern an x_0 bis zum Erreichen der Abbruchbedingung:

Mit der Anfangsnäherung x_1 nach der Iterationsformel die verbesserte Näherung x_2 berechnen, mit x_2 wiederum x_3 usw. Mit diesen Schritten fortfahren, bis sich die Ziffer an der gewünschten Stelle im Näherungswert nicht mehr ändert.

Divergiert die Folge (x_i) oder gibt es eine Division durch 0 oder nähert man sich nicht der gewünschten Nullstelle, so muss das gesamte Vorgehen mit einer verbesserten Anfangsnäherung erneut gestartet werden.

Merkzettel MF 10:

Volumen von Rotationskörpern berechnen

- Rotation um die x-Achse

(↗ Lehrbuch Beispiele F 21, 23):

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Hinweis: Integrationsgrenzen a, b auf der Rotationsachse, hier also der x-Achse angeben

- Rotation um die y-Achse

(↗ Lehrbuch Beispiel F 22):

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Arbeitsschritte:

- (1) Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen
($x = g(y)$ ist die Umkehrfunktion zu $y = f(x)$) und quadrieren.
Hinweis: Eine Veranschaulichung ist ggf. angebracht, um sich eine Vorstellung von dem entstehenden Rotationskörper machen zu können.
- (2) Integrationsgrenzen auf der y-Achse – so nicht vorgegeben oder aus dem Sachverhalt zu entnehmen – mittels $y = f(x)$ berechnen:
 $c = f(a)$ und $d = f(b)$
(a und b sind also die Abszissen der zu der begrenzenden Kurve gehörenden Punkte mit den Ordinaten c bzw. d)
- (3) Integration nach y ausführen

Merkzettel F 11:

Ober- bzw. Mantelflächeninhalt von Rotationskörpern berechnen

Arbeitsschritte (↗ Lehrbuch, S. 207/208):

- (1) Ableitung der Funktion f bilden, deren Graph rotiert (↗ MD 4)

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x)$$

- (2) Im Integranden der Mantelflächen-Formel (↗ Satz F 7) enthaltene Wurzel berechnen und den Term möglichst weit vereinfachen

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

- (3) Das Integral berechnen

$$A_M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

- (4) Bei Oberflächenberechnung gegebenenfalls Deck- und Grundflächeninhalt addieren

$$A_O = A_G + A_M + A_D$$

Merkzettel MF 12:

Bogenlänge eines Kurvenstücks berechnen

Eine Kurve sei der Graph einer Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$.

Arbeitsschritte:

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">(1) Ableitung von $y = f(x)$ bilden (↗ MD 3) und quadrieren(2) Im Integranden der Bogenlänge-Formel (↗ Satz F 6) enthaltene Wurzel berechnen und den Term möglichst weit vereinfachen(3) Integrationsgrenzen bestimmen; dabei eventuelle Vereinfachungen durch symmetrisch liegende/kongruente Kurvenstücke beachten(4) Integral berechnen | $y' = f'(x) \rightarrow y'^2 = [f'(x)]^2$ $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ $s = 2\pi \int_a^b \sqrt{1+y'^2} \, dx$ |
|--|--|

Merkzettel MF 13:

Untersuchen, ob eine Funktion eine Differentialgleichung erfüllt

Eine Differentialgleichung vom Grade n und eine Lösungsfunktion f der Differentialgleichung sind gegeben.

Arbeitsschritte (↗ [Lehrbuch](#), [Beispiele F 32](#), [F 34a](#)):

- (1) Funktion f n -mal differenzieren (↗ [MD 4](#))
- (2) Funktion f und die in der Differentialgleichung enthaltenen Ableitungen auf beiden Seiten der Differentialgleichung einsetzen
- (3) Beide Seiten der Differentialgleichung vereinfachen und zusammenfassen
- (4) Stimmen die erhaltenen Ausdrücke auf den beiden Seiten identisch überein, so ist f eine **Lösung der Differentialgleichung / f erfüllt die Differentialgleichung.**

Merkzettel MF 14:

Anfangswertproblem einer Differentialgleichung lösen

Eine Differentialgleichung n -ten Grades, ihre allgemeine Lösung f mit n Parametern und n Anfangsbedingungen an f oder an Ableitungen von f sind bekannt.

Arbeitsschritte (↗ [Lehrbuch, Beispiele F 33, F 34b](#)):

- (1) Allgemeine Lösung f in alle n Anfangsbedingungen einsetzen; es entsteht ein Gleichungssystem mit n Gleichungen (Anfangsbedingungen) und n Unbekannten (Parameter der allgemeinen Lösung).
- (2) Gleichungssystem lösen (↗ [Lehrbuch, Abschnitt G 3](#)); man erhält Werte für die n Parameter der allgemeinen Lösung.
- (3) Werte der n Parameter in die allgemeine Lösung f einsetzen; man erhält eine partikuläre **Lösung**, die die **Differentialgleichung** und die n **Anfangsbedingungen** erfüllt.

Merkzettel MF 15: Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen

Differentialgleichung der Form	Lösungsmethoden (↗ Lehrbuch, Abschnitt F 5.5)
<ul style="list-style-type: none"> • $f'(x) = g(x)$ 	<p>Lösen durch direktes Integrieren (↗ Lehrbuch, Beispiel F 35)</p> $f(x) = \int g(x) dx$ <p><i>Hinweis:</i> Bei der Ermittlung des unbestimmten Integrals darf die Integrationskonstante nicht vergessen werden.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • $f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$ <p>bzw.</p> $f'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$ <p>bzw.</p> $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ <p>(trennbare Differentialgleichung)</p>	<p>Lösen durch Trennen der Variablen (↗ Lehrbuch, Beispiel F 36):</p> <p><i>Arbeitsschritte:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Trennen der Variablen: $h(y) dy = g(x) dx$ (2) Integrieren: $\int h(y) dy = \int g(x) dx \rightarrow H(y) = G(x) + c$ $c \in \mathbb{R}$ ist der Parameter der allgemeinen Lösung (3) Erhaltene Gleichung umstellen nach y
<ul style="list-style-type: none"> • Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $f'(x) + qf(x) = s$ mit $q, s \in \mathbb{R}$ 	<p>(↗ Beispiel F 37 im Lehrbuch, S. 220/221)</p> <p>Für $q = 0$ gilt: $y = f(x) = k + sx$</p> <p>Für $q \neq 0$ gilt: $y = f(x) = \frac{s}{q} + ke^{-qx}$</p> <p>$k \in \mathbb{R}$ ist der Parameter der allgemeinen Lösung</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Beliebige Differentialgleichung 1. Ordnung in expliziter Darstellung $f'(x) = G(x; f(x))$ bzw. $y' = G(x; y)$ mit der Anfangsbedingung $y_0 = f(x_0)$ 	<p>Numerische Lösung nach dem Polygonzugverfahren mit einer Schrittweite von h im Intervall $[x_0; x_e]$ (bzw. $[x_e; x_0]$) (↗ Lehrbuch, Abschnitt F 5.6)</p> <p><i>Arbeitsschritte:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Schrittweite h festlegen (in Abhängigkeit der zu erreichenden Genauigkeit). h kann positiv oder auch negativ sein. (2) Bildungsvorschrift für eine Folge von Punkten $P_i(x_i; y_i)$ im Richtungsfeld der Differentialgleichung aufstellen: $x_i = x_0 + ih$ und $y_{i+1} = y_i + hG(x_i; y_i)$, $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 0$, $h \neq 0$ (3) Aus den gegebenen Werten x_0 und y_0 (Anfangsbedingung!) nach den beiden Bildungsvorschriften x_i und y_i, aus diesen dann x_2 und y_2 usw. berechnen, bis x_i den Endwert x_e erreicht hat. Die erhaltene Folge der Punkte $P_i(x_i; y_i)$ ist eine Näherungslösung der gesuchten Funktion f. <p><i>Hinweise:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Je näher h zur 0 liegt, desto näher liegen die Punkte P_i am Graphen der Funktion f und desto höher ist der Rechenaufwand. – Derartige Näherungslösungen lassen sich mithilfe programmierbarer Taschenrechner bzw. solchen mit Computeralgebrasystem leicht berechnen und darstellen.

Merkzettel MF 16:

Differentialgleichungen 2. Ordnung lösen

Homogene lineare
Differentialgleichung
2. Ordnung mit konstanten
Koeffizienten

$$f''(x) + q \cdot f'(x) + r \cdot f(x) = 0$$

mit $q, r \in \mathbb{R}$

Die Differentialgleichung $f''(x) + qf'(x) + rf(x) = 0$ ist für beliebige $q, r \in \mathbb{R}$ lösbar.

Vorgehensweise (↗ [Lehrbuch, Abschnitt F 7](#), insbes. [Beispiel F 39](#)):

Die **allgemeine Lösung** $y = f(x)$ hängt ab vom Wert des Ausdrucks $\frac{q^2}{4} - r$:

- Für $\frac{q^2}{4} > 0$ gilt: $f(x) = c_1 \cdot e^{k_1 x} + c_2 \cdot e^{k_2 x}$ mit $k_{1/2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}$
- Für $\frac{q^2}{4} = 0$ gilt: $f(x) = c_1 \cdot e^{-\frac{q}{2}x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{q}{2}x}$
- Für $\frac{q^2}{4} < 0$ gilt: $f(x) = e^{-\frac{q}{2}x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{r - \frac{q^2}{4}}$$

In allen Fällen gilt $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bel.

Merkzettel MG 1:

Vektoren addieren/ subtrahieren

- für zwei Vektoren der Ebene

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ (↗ Lehrbuch, S. 239), dann ist

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 238})$$

- für zwei Vektoren im Raum

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ (↗ Lehrbuch, S. 239), dann ist

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 238})$$

Merkzettel MG 2: Vektoren vervielfachen

- für Vektoren der Ebene

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ (↗ Lehrbuch, S. 239), dann ist

$$r \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_x \\ ra_y \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}, \text{ das } \mathbf{r}\text{-fache des Vektors } \vec{a} \quad (\text{↗ Lehrbuch, S. 239}).$$

- für Vektoren im Raum

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, dann ist

$$r \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_x \\ ra_y \\ ra_z \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}, \text{ das } \mathbf{r}\text{-fache des Vektors } \vec{a}.$$

- für zwei Vektoren der Ebene

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ein Vielfaches von $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}, \text{ mit } a_x = rb_x \text{ und } a_y = rb_y.$$

- für zwei Vektoren im Raum

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ ein Vielfaches von $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}, \text{ mit } a_x = rb_x, a_y = rb_y, a_z = rb_z.$$

Umkehrung:

Untersuchen, ob \vec{a} ein
Vielfaches von \vec{b} ist

Arbeitsschritte:

(1) $\vec{a} = r\vec{b}$

(2) $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

(3) Prinzip des Koordinatenvergleichs (↗ MG 4) anwenden
→ Gleichungssystem

(I) $a_x = r \cdot b_x$

(II) $a_y = r \cdot b_y$

(III) $a_z = r \cdot b_z$

(4) r aus einer der Gleichungen (I) bis (III) ermitteln

(5) Überprüfen, ob r auch die beiden anderen beiden Gleichungen erfüllt

(6) Wenn ja, so ist \vec{a} das r -fache von \vec{b} .

Merkzettel MG 3:

Vektoren linear kombinieren / Linearkombination von Vektoren aufstellen

- Linearkombination von Vektoren herstellen

Wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ Vektoren und $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$, so ist

$$\vec{b} = r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix} + \dots + r_n \begin{pmatrix} a_{nx} \\ a_{ny} \\ a_{nz} \end{pmatrix} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Definition G 9})$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

- einen Vektor \vec{a} der Ebene als Linearkombination von nichtparallelen Vektoren \vec{b} und \vec{c} dieser Ebene darstellen
(\nearrow Lehrbuch, Beispiel G 7)

Arbeitsschritte:

(1) $\vec{a} = r\vec{b} + s\vec{c}$

(2) $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$

(3) Prinzip des Koordinatenvergleichs (\nearrow MG 4) anwenden
 \rightarrow Gleichungssystem:

(I) $\vec{a}_x = r\vec{b}_x + s\vec{c}_x$

(II) $\vec{a}_y = r\vec{b}_y + s\vec{c}_y$

(4) Aus Gleichungssystem r und s bestimmen

(5) Werte für r und s in $\vec{a} = r\vec{b} + s\vec{c}$ einsetzen

Merkzettel MG 4:

Prinzip des Koordinatenvergleichs anwenden

- Vektoren in der Ebene:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{a} = a_x \vec{a}_1 + a_y \vec{a}_2$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{b} = b_x \vec{a}_1 + b_y \vec{a}_2$$

- Vektoren im Raum:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{a} = a_x \vec{a}_1 + a_y \vec{a}_2 + a_z \vec{a}_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{b} = b_x \vec{a}_1 + b_y \vec{a}_2 + b_z \vec{a}_3$$

Wenn $\vec{a} = \vec{b}$, so gilt

$$a_x = b_x \qquad a_y = b_y$$

(↗ Lehrbuch, Satz G 8)

Wenn $\vec{a} = \vec{b}$, so gilt

$$a_x = b_x \qquad a_y = b_y \qquad a_z = b_z$$

(↗ Lehrbuch, Satz G 8)

Merkzettel MG 5:

Vektoren auf lineare Abhängigkeit untersuchen

- \vec{a}, \vec{b} sind zwei Vektoren der Ebene

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ **linear abhängig**, dann gilt

$$r_1 \vec{a} + r_2 \vec{b} = \vec{0} \text{ bzw.}$$

$$r_1 \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \vec{0}, \text{ wobei nicht } r_1 \text{ und } r_2 \text{ gleich } 0 \text{ sind.}$$

(↗ Lehrbuch, Abschnitt G 1.6)

- Um zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} der Ebene auf **lineare Abhängigkeit** zu untersuchen, ist zu prüfen:

(1) Hat das Gleichungssystem (↗ MG 4)

$$(I) \quad r_1 a_x + r_2 b_x = 0$$

$$(II) \quad r_1 a_y + r_2 b_y = 0$$

für r_1, r_2 eine nichttriviale Lösung (also r_1, r_2 nicht beide gleich 0)?

Wenn ja, dann sind \vec{a} und \vec{b} linear abhängig.

oder:

(2) Gilt $\vec{b} = -\frac{r_1}{r_2} \vec{a}$ bzw. $\vec{a} = -\frac{r_2}{r_1} \vec{b}$, sind also \vec{a} und \vec{b} Vielfache voneinander?

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind drei Vektoren im Raum

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ linear abhängig, dann gilt

$$r_1 \vec{a} + r_2 \vec{b} + r_3 \vec{c} = \vec{0} \text{ bzw.}$$

bzw.

$$r_1 \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \vec{0}, \text{ wobei } r_1, r_2 \text{ und } r_3 \text{ nicht gleichzeitig gleich } 0 \text{ sind}$$

(↗ Lehrbuch, Abschnitt G 1.6)

- Um drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des Raumes auf **lineare Abhängigkeit** zu untersuchen, ist zu prüfen:

Hat das Gleichungssystem (↗ MG 4)

$$(I) \quad r_1 a_x + r_2 b_x + r_3 c_x = 0$$

$$(II) \quad r_1 a_y + r_2 b_y + r_3 c_y = 0$$

$$(III) \quad r_1 a_z + r_2 b_z + r_3 c_z = 0$$

außer der trivialen Lösung $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ noch eine weitere Lösung mit einem von 0 verschiedenen Wert für mindesten *ein* r_i ($i = 1, 2, 3$). Wenn ja, dann sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig.

Merkzettel MG 6:

Vektoren auf lineare Unabhängigkeit untersuchen

<ul style="list-style-type: none">• \vec{a}, \vec{b} sind zwei Vektoren der Ebene	<p>Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ linear unabhängig, dann gilt</p> <p>$r_1 \vec{a} + r_2 \vec{b} = \vec{0}$ bzw.</p> <p>$r_1 \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \vec{0}$ nur, wenn $r_1 = r_2 = 0$.</p>
<ul style="list-style-type: none">• Um zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} der Ebene auf lineare Unabhängigkeit zu untersuchen, ist zu prüfen:	<p>Hat das Gleichungssystem (↗ MG 4)</p> <p>(I) $r_1 a_x + r_2 b_x = 0$</p> <p>(II) $r_1 a_y + r_2 b_y = 0$</p> <p>nur die Lösung $r_1 = r_2 = 0$? Wenn ja, so sind \vec{a} und \vec{b} linear unabhängig.</p>
<ul style="list-style-type: none">• $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind drei Vektoren des Raumes	<p>Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ linear unabhängig, dann gilt</p> <p>$r_1 \vec{a} + r_2 \vec{b} + r_3 \vec{c} = \vec{0}$ nur, wenn $r_1 = r_2 = r_3 = 0$</p>
<ul style="list-style-type: none">• Um drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des Raumes auf lineare Unabhängigkeit zu untersuchen, ist zu prüfen:	<p>Hat das Gleichungssystem (↗ MG 4)</p> <p>(I) $r_1 a_x + r_2 b_x + r_3 c_x = 0$</p> <p>(II) $r_1 a_y + r_2 b_y + r_3 c_y = 0$</p> <p>(III) $r_1 a_z + r_2 b_z + r_3 c_z = 0$</p> <p>einzig und allein die triviale Lösung $r_1 = r_2 = r_3 = 0$? Wenn ja, so sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig.</p>

Merkzettel MG 7:

Mittelpunkt einer Strecke ermitteln

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Strecke $\overline{P_1P_2}$ in der Ebene | <p>Wenn $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, dann $M(x_M; y_M)$ mit</p> $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{und} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ |
| <ul style="list-style-type: none">• Strecke $\overline{P_1P_2}$ im Raum | <p>Wenn $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$, dann $M(x_M; y_M; z_M)$ mit</p> $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{und} \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$ |

Merkzettel MG 8:

Koordinaten von Teilpunkten einer Strecke berechnen

- Strecke \overline{AB} in der Ebene

Wenn $T(x_T; y_T) \in (\overline{AB})$ mit $\vec{AT} = \tau \vec{TB}$, dann gilt

$$x_T = \frac{x_A + \tau x_B}{1 + \tau} \text{ und } y_T = \frac{y_A + \tau y_B}{1 + \tau} \text{ mit } \tau \neq -1.$$

- Strecke \overline{AB} im Raum

Wenn $T(x_T; y_T; z_T) \in (\overline{AB})$ mit $\vec{AT} = \tau \vec{TB}$, dann gilt

$$x_T = \frac{x_A + \tau x_B}{1 + \tau}, \quad y_T = \frac{y_A + \tau y_B}{1 + \tau} \text{ und } z_T = \frac{z_A + \tau z_B}{1 + \tau} \text{ mit } \tau \neq -1.$$

Merkzettel MG 9: Gleichung einer Geraden aufstellen

• in der Ebene

- a) Wenn $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, dann

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{(Zweipunktegleichung)}$$
 (↗ Lehrbuch, Satz G 18)
- b) Wenn $P_0(x_0; y_0)$ und Anstieg m (↗ MG 10), dann

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{(Punktrichtungsgleichung)}$$
 (↗ Lehrbuch, Satz G 15)
- c) Wenn Anstieg m (↗ MG 10) und $S_y(0; n)$, dann

$$y = mx + n \quad \text{(Normalform der Geradengleichung)}$$
- d) Wenn $S_x(s_x; 0)$ und $S_y(0; s_y)$, dann

$$\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} = 1 \quad \text{(Achsenabschnittsform)}$$
 (↗ Lehrbuch, Satz G 19)
- e) Wenn $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, dann

$$\vec{x} = \vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$
 (Zweipunktegleichung in Parameterform)
 (↗ Lehrbuch, Satz G 17)
- f) Wenn $P_0(x_0; y_0)$ und Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ (↗ MG 11), dann

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \quad \text{(Punktrichtungsgleichung in Parameterform)}$$
 (↗ Lehrbuch, Satz G 14)
- g) Durch Umstellen der Gleichungen a) bis f) erhält man die **allgemeine Form** (Koordinatenform) einer Geradengleichung $ax + by = c$ (↗ Lehrbuch, S. 259).

• im Raum

- a) Wenn $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$, dann

$$\vec{x} = \vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$
 (Zweipunktegleichung in Parameterform)
 (↗ Lehrbuch, Satz G 17)
- b) Wenn $P_0(x_0; y_0; z_0)$ und Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ (↗ MG 11), dann

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \quad \text{(Punktrichtungsgleichung in Parameterform)}$$
 (↗ Lehrbuch, Satz G 14)

Merkzettel MG 10:

Anstieg einer Geraden ermitteln

- Gerade g
in der Ebene

a) Wenn $g: y = mx + n$, dann Anstieg gleich m

b) Wenn Gerade g durch $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, dann Anstieg $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$

(↗ Lehrbuch, Satz G 18)

c) Wenn $g: ax + by + c = 0$, dann $m = -\frac{a}{b}$

(↗ Lehrbuch, S. 259/260)

d) Wenn $g: \vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a}$, dann $m = \frac{a_y}{a_x}$

(↗ Lehrbuch, Satz G 15)

Merkzettel MG 11:**Richtungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ bestimmen**

- $\overrightarrow{P_1P_2}$ in der Ebene

Wenn $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, dann $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{P_1P_2}$ im Raum

Wenn $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$, dann $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

Merkzettel MG 12:

Parametergleichung einer Geraden der Ebene in parameterfreie Gleichung umformen

Geradengleichung: $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$

Umformungsschritte:

- (1) Gleichung ausführlich schreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Weg 1:

- (2) Prinzip des Koordinatenvergleichs (↗ MG 4) anwenden:

$$x = x_0 + ta_x \quad \text{bzw.} \quad x - x_0 = ta_x$$

$$y = y_0 + ta_y \quad \text{bzw.} \quad y - y_0 = ta_y$$

- (3) Parameter t eliminieren, z. B.:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$$

- (4) Gleichung umformen, z. B.:

$$(x - x_0) a_y - (y - y_0) a_x = 0$$

oder

$$y = \frac{a_y}{a_x} x - \left(\frac{a_y}{a_x} x_0 - y_0 \right)$$

Weg 2:

- (2) Aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ablesen: $m = \frac{a_y}{a_x}$

- (3) Aus $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ Koordinaten eines Punktes von g ablesen: $P_0(x_0; y_0)$

- (4) m und Koordinaten von P_0 in parameterfreie Punkttrichtungsgleichung (↗ MG 9; ↗ Lehrbuch, Satz G 15) einsetzen.

Merkzettel MG 13:

Parameterfreie Gleichung einer Geraden der Ebene in vektorielle Gleichung umformen

Geradengleichung: $g: y = mx + n$

Weg 1:

Koordinaten zweier Punkte von g berechnen und in die (allgemeine) Zweipunktgleichung einer Geraden in Parameterform
(↗ MG 9; ↗ Lehrbuch, Satz G 17) einsetzen

Weg 2:

Mittels $m = \frac{a_y}{a_x}$ einen Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ von g (↗ MG 11)

bestimmen, die Koordinaten eines Punktes von g berechnen und beides in die Punktrichtungsgleichung einer Geraden in Parameterform
(↗ MG 9; ↗ Lehrbuch, Satz G 14) einsetzen

Merkzettel MG 14:

Skalarprodukt zweier Vektoren ermitteln

- für zwei Vektoren der Ebene

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dann ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Satz G 34})$$

- für zwei Vektoren im Raum

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, dann ist ihr **Skalarprodukt**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Satz G 34})$$

Merkzettel MG 15:

Vektorprodukt zweier Vektoren ermitteln

- für zwei Vektoren im Raum

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, dann ist ihr **Vektorprodukt**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

(↗ Lehrbuch, Satz G 48)

Merkzettel MG 16:

Betrag / Länge eines Vektors berechnen

- für Vektoren in der Ebene

$$\text{Wenn } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \text{ dann } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Satz G 10})$$

$$\text{Wenn } \vec{a} = \vec{AB}, \text{ dann } |\vec{a}| = |\overline{AB}| \quad (\nearrow \text{MG 17})$$

- für Vektoren im Raum

$$\text{Wenn } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \text{ dann } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Satz G 10})$$

$$\text{Wenn } \vec{a} = \vec{AB}, \text{ dann } |\vec{a}| = |\overline{AB}| \quad (\nearrow \text{MG 17})$$

Merkzettel MG 17:
Abstand zweier Punkte ermitteln

• für zwei Punkte in der Ebene	Wenn $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, dann $s = \left \overline{P_1 P_2} \right = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	(↗ Lehrbuch, Satz G 11)
• für zwei Punkte im Raum	Wenn $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$, dann $s = \left \overline{P_1 P_2} \right = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	(↗ Lehrbuch, Satz G 11)

Merkzettel MG 18:
Länge einer Strecke ermitteln

• für Strecken $\overline{P_1P_2}$ in der Ebene	Wenn $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, dann $s = \left \overline{P_1P_2} \right = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	(↗ MG 17)
• für Strecken $\overline{P_1P_2}$ im Raum	Wenn $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$, dann $s = \left \overline{P_1P_2} \right = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	(↗ MG 17)

Merkzettel MG 19:

Einheitsvektor zu einem Vektor ermitteln

- | | | |
|-----------------------------|---|---------------------------|
| • für Vektoren in der Ebene | Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, dann Einheitsvektor $\vec{a}_0 = \frac{1}{ \vec{a} } \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ | (mit $ \vec{a} $ ↗ MG 16) |
| • für Vektoren im Raum | Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, dann $\vec{a}_0 = \frac{1}{ \vec{a} } \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ | (mit $ \vec{a} $ ↗ MG 16) |

Merkzettel MG 20:
Normalenvektor ermitteln

<ul style="list-style-type: none"> • für Gerade g in der Ebene 	<p>a) Wenn $g: ax + by + c = 0$, dann Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.</p> <p>b) Wenn $g: \vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, dann $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Einheitsnormalenvektor: $\frac{\vec{n}}{ \vec{n} }$</p>
<ul style="list-style-type: none"> • für Ebene ε 	<p>a) Wenn $\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$, dann $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.</p> <p>b) Wenn $g: \vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{u} + s\vec{v}$ (↗ MG 29):</p> <p>(1) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Vektorprodukt) bilden (↗ MG 15, ↗ Lehrbuch, Beispiel G 88) oder (2) Aus $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (↗ MG 26; ↗ MG 14) Gleichungssystem für n_1, n_2 und n_3 von \vec{n} aufstellen und daraus mögliche Koordinaten von \vec{n} bestimmen.</p>

Merkzettel MG 21:

Abstand eines Punktes von einer Geraden ermitteln

- für Gerade g und Punkt P_1 in der Ebene

a) Wenn g: $ax + by + c = 0$ (allg. Form) und $P_1(x_1; y_1)$, dann

$$d = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Satz G 38})$$

b) Wenn g: $y = mx + n$ und $P_1(x_1; y_1)$, dann

(1) allg. Form aufstellen und weiter wie unter a)

(2) aus m Richtungsvektor \vec{a} von g mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ ermitteln und anschließend einen Normalenvektor bestimmen und Normalform einer Geradengleichung aufstellen.

Dann weiter wie unter c).

c) Wenn g: $(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n} = 0$ (Normalform) und $P_1(x_1; y_1)$,

$$\text{dann } d = \left| \left(\vec{p}_1 - \vec{p}_0 \right) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Satz G 37})$$

d) Wenn g: $\left(\vec{x} - \vec{p}_0 \right) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0$ (HESSEsche Normalform)

$$\text{und } P_1(x_1; y_1), \text{ dann } d = \left| \left(\vec{p}_1 - \vec{p}_0 \right) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, Satz G 37})$$

(Normalenvektor \nearrow MG 20;
Skalarprodukt \nearrow MG 14;
Betrag eines Vektors \nearrow MG 16)

- für Gerade g und Punkt P_1 im Raum

Wenn g: $\vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a}$ und $P_1(x_1; y_1; z_1)$, dann aus \vec{a} einen Normalenvektor \vec{n} ermitteln und die Gleichung der durch P_1 orthogonalen Ebene ε zu g aufstellen. Den Schnittpunkt S von dg und ε berechnen, um

- den Abstand d der Punkte S und P_1 **oder**

$$\bullet \text{ d aus } d = \sqrt{\left(\vec{p}_1 - \vec{p}_0 \right)^2 - \left(\left(\vec{p}_1 - \vec{p}_0 \right) \cdot \vec{a}_0 \right)^2}$$

(\vec{a}_0 – Einheitsvektor von g) zu ermitteln.

(Normalenvektor \nearrow MG 20;
Abstand zweier Punkte \nearrow MG 17;
Skalarprodukt \nearrow MG 14;
Einheitsvektor \nearrow MG 19)

Merkzettel MG 22:

Abstand eines Punktes von einer Ebene ermitteln

- für Punkt P_1 und Ebene ε
 - a) Wenn $\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$ und $P_1(x_1; y_1; z_1)$,
dann $d = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
 - b) Wenn $\varepsilon: (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{x} - \vec{p}_0$) $\cdot \vec{n} = 0$ und $P_1(x_1; y_1; z_1)$,
dann $d = |(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \cdot \vec{n}_0|$.
(*Normalenvektor* ↗ MG 20; *Skalarprodukt* ↗ MG 14)
 - c) Wenn $\varepsilon: \vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{u} + s\vec{v}$ und $P_1(x_1; y_1; z_1)$,
dann Parameterform in Koordinaten- (↗ MG 12) oder Normalform
(↗ *Lehrbuch, Abschnitt G 6.3*) umwandeln und weiter wie unter a) oder b).

Merkzettel MG 23:**Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen**

• für zwei Vektoren der Ebene	<p>Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dann ψ aus</p> $\cos \psi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \quad \text{mit } 0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ <p>(<i>Orthogonalität ↗ MG 26</i>)</p>
• für zwei Vektoren im Raum	<p>Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, dann ψ aus</p> $\cos \psi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad \text{mit } 0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ <p>(<i>↗ Lehrbuch, Beispiel G 68</i>)</p> <p>(<i>Orthogonalität ↗ MG 26</i>)</p>

Merkzettel MG 24:

Lagebeziehungen von Geraden untersuchen

- **Geraden der Ebene** durch parameterfreie Gleichungen gegeben

$$g: a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{und} \quad h: a_2x + b_2y = c_2$$

Arbeitsschritte:

(1) Gleichungssystem

$$(I) \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$(II) \quad a_2x + b_2y = c_2$$

(2) Wenn das Gleichungssystem

a) **genau eine** Lösung hat, dann schneiden g und h einander;

b) **unendlich viele** Lösungen hat, dann sind g und h (parallel und) identisch;

c) **keine** Lösung hat, dann sind g und h echt parallel.

(↗ Lehrbuch, Beispiel G 34)

- **Geraden der Ebene** durch Vektorgleichungen gegeben
(↗ Lehrbuch, Beispiel G 35)

$$g: \vec{x} = \vec{p}_1 + r\vec{a}_1 \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{p}_2 + s\vec{a}_2, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Weg (1):

$$\text{Vektorgleichung } \vec{p}_1 + r\vec{a}_1 = \vec{p}_2 + s\vec{a}_2 \text{ lösen}$$

Schrittfolge:

- Gleichung ausführlich schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \end{pmatrix}$$

- Mittels Koordinatenvergleichs (↗ MG 4) Gleichungssystem aufstellen:

$$(I) \quad x_1 + ra_{1x} = x_2 + sa_{2x}$$

$$(II) \quad y_1 + ra_{1y} = y_2 + sa_{2y}$$

- r und s ermitteln

Wenn die Vektorgleichung

a) **genau eine** Lösung hat, dann besitzen g und h einen Schnittpunkt / sie schneiden einander;

b) **unendlich viele** Lösungen hat, dann sind g und h (parallel und) identisch;

c) **keine** Lösung hat, dann sind g und h echt parallel.

Weg (2):

a) Wenn \vec{a}_1 ein Vielfaches von \vec{a}_2 (↗ MG 2) und $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ ein Vielfaches von \vec{a}_1 , dann sind g und h (parallel und) identisch.

b) Wenn \vec{a}_1 ein Vielfaches von \vec{a}_2 (↗ MG 2) und $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ kein Vielfaches von \vec{a}_1 , dann sind g und h echt parallel.

c) Wenn \vec{a}_1 kein Vielfaches von \vec{a}_2 (↗ MG 2) und $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ linear abhängig (↗ MG 5), dann haben g und h einen Schnittpunkt.

- **Geraden der Ebene** durch parameterfreie und durch Vektorgleichung gegeben

$$g: \vec{x} = \vec{p}_1 + r\vec{a}_1 \quad \text{und} \quad h: a_1x + b_1y = c_1$$

Weg (1):

Gleichung von g in parameterfreie Form überführen (↗ MG 12) und weiter wie oben

Weg (2):

Gleichung von h in Parameterform / in Vektorgleichung überführen (↗ MG 13) und weiter wie oben

- Geraden im Raum durch Vektorgleichungen gegeben

g: $\vec{x} = \vec{p}_1 + r\vec{a}_1$ und h: $\vec{x} = \vec{p}_2 + s\vec{a}_2$, $r, s \in \mathbb{R}$

Weg (1):

Vektorgleichung $\vec{p}_1 + r\vec{a}_1 = \vec{p}_2 + s\vec{a}_2$ lösen

Schrittfolge:

- Gleichung ausführlich schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix}$$

- Mittels Koordinatenvergleichs (↗ MG 4) Gleichungssystem aufstellen:

$$(I) \quad x_1 + ra_{1x} = x_2 + sa_{2x}$$

$$(II) \quad y_1 + ra_{1y} = y_2 + sa_{2y}$$

$$(III) \quad z_1 + ra_{1z} = z_2 + sa_{2z}$$

- r und s so ermitteln, dass alle drei Gleichungen erfüllt werden

Wenn die Vektorgleichung

- genau eine Lösung hat, dann besitzen g und h einen Schnittpunkt / sie schneiden einander;
- unendlich viele Lösungen hat, dann sind g und h (parallel und) identisch;
- keine Lösung hat und \vec{a}_1 und \vec{a}_2 linear abhängig sind (↗ MG 5), dann sind g und h echt parallel.
- keine Lösung hat und \vec{a}_1 und \vec{a}_2 linear unabhängig sind (↗ MG 6), dann sind g und h windschief.

Weg (2):

- Wenn \vec{a}_1 ein Vielfaches von \vec{a}_2 (↗ MG 2) und $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ ein Vielfaches von \vec{a}_1 , dann sind g und h (parallel und) identisch.
- Wenn \vec{a}_1 ein Vielfaches von \vec{a}_2 (↗ MG 2) und $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ kein Vielfaches von \vec{a}_1 , dann sind g und h echt parallel.
- Wenn \vec{a}_1 kein Vielfaches von \vec{a}_2 (↗ MG 2) und $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ linear abhängig (↗ MG 5), dann haben g und h einen Schnittpunkt.
- Wenn \vec{a}_1 kein Vielfaches von \vec{a}_2 (↗ MG 2) und $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ linear abhängig (↗ MG 6), dann sind g und h windschief.

Merkzettel MG 25:**Winkel zwischen zwei einander schneidenden Geraden berechnen**

- für zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 der Ebene

- a) Wenn $g_1: y = m_1x + n_1$ und $g_2: y = m_2x + n_2$, dann ψ aus
 $\tan \psi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$ ermitteln (↗ Lehrbuch, Abschnitt G 2.5)
 Orthogonalität: ↗ MG 32
- b) Wenn $g_1: a_1x + b_1y + c = 0$ und $g_2: a_2x + b_2y + c = 0$,
 dann \vec{n}_1 aus g_1 und \vec{n}_2 aus g_2 (Normalenvektor ↗ MG 19) ermitteln und
 ψ aus $\cos \psi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
 (Skalarprodukt ↗ MG 14, Betrag eines Vektors ↗ MG 16) berechnen.
 Orthogonalität: ↗ MG 32
- c) Wenn $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + t_1 \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t_2 \vec{a}_2$, dann ψ aus
 $\cos \psi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$
 (Skalarprodukt ↗ MG 14, Betrag eines Vektors ↗ MG 16) berechnen.
 Orthogonalität: ↗ MG 32

- für zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 im Raum

- Wenn $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + t_1 \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t_2 \vec{a}_2$, dann ψ aus
 $\cos \psi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$
 (Skalarprodukt ↗ MG 14, Betrag eines Vektors ↗ MG 16) berechnen
 (↗ Lehrbuch, Seite 314).
 Orthogonalität: ↗ MG 32

Merkzettel MG 26:

Vektoren auf Orthogonalität untersuchen

- für zwei Vektoren der Ebene

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$, dann muss $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gelten.

(Skalarprodukt ↗ MG 14) (↗ Lehrbuch, Satz G 35)

- für zwei Vektoren im Raum

Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, dann muss $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gelten.

(Skalarprodukt ↗ MG 14) (↗ Lehrbuch, Satz G 35)

Merkzettel MG 27:

Einander schneidende Geraden der Ebene auf Orthogonalität untersuchen

- für zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 der Ebene

Weg (1):

Wenn $g_1: y = m_1x + n_1$ und $g_2: y = m_2x + n_2$, dann muss $m_1 \cdot m_2 = -1$ gelten.

(↗ [Lehrbuch, Satz G 20](#))

Weg (2):

- Wenn $g_1: a_1x + b_1y + c = 0$ und $g_2: a_2x + b_2y + c = 0$, dann \vec{n}_1 aus g_1 und \vec{n}_2 aus g_2 ([Normalenvektor ↗ MG 20](#)) ermitteln.

- Für das *Skalarprodukt* (↗ MG 14) muss gelten: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Weg (3):

Wenn $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + t_1 \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t_2 \vec{a}_2$,

dann muss gelten: $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ ([Skalarprodukt ↗ MG 14](#))

Merkzettel MG 28:**Spannvektor einer Ebene ermitteln**

- im Raum

$$\left| \begin{array}{l} \text{Wenn } P_1(x_1; y_1; z_1) \text{ und } P_2(x_2; y_2; z_2), \text{ dann} \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 283}) \end{array} \right.$$

Merkzettel MG 29: Gleichung einer Ebene aufstellen

• Parametergleichungen

a) Wenn $P_0(x_0; y_0; z_0)$ sowie $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

zwei linear unabhängige Vektoren (↗ MG 11, MG 6), dann

$$\varepsilon: \vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{u} + s\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

(Punktrichtungsgleichung in Parameterform)

b) Wenn $P_0(x_0; y_0; z_0)$, $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ drei nicht kollineare (↗ Lehrbuch, Seite 238, 249) Punkte, dann

$$\varepsilon: \vec{x} = \vec{p}_0 + r(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) + s(\vec{p}_2 - \vec{p}_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

(Dreipunktegleichung in Parameterform)

c) Wenn $P_0(x_0; y_0; z_0)$ und \vec{n} Normalenvektor der Ebene (↗ MG 19), dann

$$\varepsilon: (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0 \quad (\text{HESSEsche Normalform})$$

(Skalarprodukt ↗ MG 14, Betrag eines Vektors ↗ MG 16)

• parameterfreie Gleichung

a) Wenn $P_0(x_0; y_0; z_0)$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene (↗ MG 19),

dann ist $-(ax_0 + by_0 + cz_0) = d$ und $\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$

(HESSEsche Normalform)

Merkzettel MG 30: Lagebeziehungen von Gerade und Ebene untersuchen

Wenn Gerade g und Ebene ϵ gegeben durch	dann wähle folgende Arbeitsschritte (↗ Lehrbuch, Abschnitt G 4.4):
<ul style="list-style-type: none"> • g: $\vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{a}$ $\epsilon: ax + by + cz = d$ 	<ol style="list-style-type: none"> (1) Koordinaten von $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 + ra_x \\ y_0 + ra_y \\ z_0 + ra_z \end{pmatrix}$ in Gleichung von ϵ einsetzen (2) r berechnen (3) a) Haben g und ϵ einen Punkt P gemeinsam, dann existiert ein eindeutig bestimmter Wert für r. r in Gleichung für g einsetzen und P berechnen. b) Liegt g in ϵ, dann existieren unendlich viele Lösungen für r. c) Liegt g echt parallel zu ϵ, dann gibt es keine Lösung für r.
<ul style="list-style-type: none"> • g: $\vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{a}$ $\epsilon: \vec{x} = \vec{p}_1 + s\vec{u} + t\vec{v}$ 	<ol style="list-style-type: none"> (1) Aus $\vec{p}_0 + r\vec{a} = \vec{p}_1 + s\vec{u} + t\vec{v}$ nach dem Prinzip des Koordinatenvergleichs (↗ MG 4) Gleichungssystem für r, s, t aufstellen und lösen (2) a) Haben g und ϵ einen Punkt P gemeinsam, dann existieren eindeutig bestimmte r, s, t. r in g oder s und t in ϵ einsetzen und P berechnen. b) Liegt g in ϵ, dann existieren unendlich viele Lösungen für r, s, t. c) Liegt g echt parallel zu ϵ, dann existiert keine Lösung für r, s, t.
<ul style="list-style-type: none"> • g: $\vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{a}$ $\epsilon: (\vec{x} - \vec{p}_1) \cdot \vec{n} = 0$ 	<ol style="list-style-type: none"> (1) Koordinaten von $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 + ra_x \\ y_0 + ra_y \\ z_0 + ra_z \end{pmatrix}$ in ϵ einsetzen und r berechnen. (2) a) Haben g und ϵ einen Punkt P gemeinsam, dann existieren eindeutig bestimmte r, s, t. r in g oder s und t in ϵ einsetzen und P berechnen. b) Liegt g in ϵ, dann existieren unendlich viele Lösungen für r. c) Liegt g echt parallel zu ϵ, dann gibt es keine Lösung für r.

Merkzettel MG 31: Lagebeziehungen von Ebenen untersuchen

Wenn die Ebenen ε_1 bzw. ε_2 gegeben durch	dann wähle folgende Arbeitsschritte (↗ Lehrbuch, Abschnitt G 4.5):
<p>(Fall 1)</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\varepsilon_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ $\varepsilon_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ 	<p>(1) Gleichungssystem (I) $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ lösen (II) $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$</p> <p>a) Wenn (I) ein Vielfaches von (II) ist, dann sind ε_1 und ε_2 (parallel und) identisch.</p> <p>b) Wenn sich (I) und (II) nur durch d_1 und d_2 unterscheiden, dann sind ε_1 und ε_2 echt parallel.</p> <p>c) Liegt weder der Fall a) noch der Fall b) vor, dann wie folgt vorgehen: Eine Variable eliminieren, neu entstandene Gleichung nach einer Variablen umstellen und für die dritte einen freien Parameter t einführen. x, y und z mit dem freien Parameter ausdrücken und daraus die Gleichung der Lösungsgeraden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ ermitteln.</p> <p>(↗ Lehrbuch, Beispiel G 54)</p>
<p>(Fall 2)</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\varepsilon_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + s_1\vec{u}_1 + t_1\vec{v}_1$ $\varepsilon_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + s_2\vec{u}_2 + t_2\vec{v}_2$ 	<p>(1) Aus $\vec{p}_1 + s_1\vec{u}_1 + t_1\vec{v}_1 = \vec{p}_2 + s_2\vec{u}_2 + t_2\vec{v}_2$ nach dem Prinzip des Koordinatenvergleichs (↗ MG 4) Gleichungssystem für s_1, t_1, s_2 und t_2 aufstellen und lösen (↗ Lehrbuch, Beispiel G 53)</p> <p>(2.1) Wenn das Gleichungssystem</p> <p>a) unendlich viele Lösungen hat, dann schneiden ε_1 und ε_2 einander in einer Geraden</p> <p>b) keine Lösung hat, dann sind ε_1 und ε_2 parallel zueinander.</p> <p>(2.2) Wenn sowohl \vec{u}_2 als auch \vec{v}_2 eine Linearkombination (↗ MG 3) von \vec{u}_1 und \vec{v}_1 ist und $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ eine Linearkombination von \vec{u}_1 und \vec{v}_1, dann sind ε_1 und ε_2 (parallel und) identisch.</p> <p>(2.3) Wenn \vec{u}_2 und \vec{v}_2 eine Linearkombination (↗ MG 3) von \vec{u}_1 und \vec{v}_1 ist und $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$, \vec{u}_1 und \vec{v}_1 linear unabhängig (↗ MG 6), dann sind ε_1 und ε_2 echt parallel.</p> <p>(2.4) Wenn \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2 oder \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2 linear unabhängig (↗ MG 6) sind, dann schneiden ε_1 und ε_2 einander in einer Geraden.</p>
<p>(Fall 3)</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\varepsilon_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + s_1\vec{u}_1 + t_1\vec{v}_1$ $\varepsilon_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ 	<p>(1) Gleichung von ε_2 in Parameterform überführen und weiter wie unter (Fall 2) (↗ Lehrbuch, Beispiel G 55)</p> <p>oder</p> <p>(2) ε_1 in Koordinatenform schreiben und weiter wie in (Fall 1).</p>

Merkzettel MG 32:

Einander schneidende Geraden im Raum bzw. Geraden und Ebenen auf Orthogonalität untersuchen

- für zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 im Raum

Wenn $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + t_1 \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t_2 \vec{a}_2$, dann muss gelten:
 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ (*Skalarprodukt ↗ MG 14*)

- für Ebene ε und Gerade g

Arbeitsschritte:

- (1) Für die Ebene ε einen Normalenvektor \vec{n} (*Normalenvektor ↗ MG 20*) und für die Gerade g einen Richtungsvektor \vec{a} bestimmen (*Richtungsvektor ↗ MG 11*)
- (2) Es muss gelten: $\vec{n} = \lambda \vec{a}$ (*Lineare Abhängigkeit ↗ MG 5*).

Merkzettel MG 33:

Einander schneidende Ebenen auf Orthogonalität untersuchen

- für zwei einander schneidende Ebenen ε_1 und ε_2

Arbeitsschritte:

- (1) Für ε_1 und ε_2 die Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 (*Normalenvektor* ↗ MG 20) ermitteln.
- (2) Für ihr *Skalarprodukt* (↗ MG 14) muss gelten: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Merkzettel MG 34:

Winkel zwischen Geraden und Ebenen berechnen

- Gerade g und Ebene ε sind durch Gleichungen gegeben

Arbeitsschritte (↗ [Lehrbuch, Beispiel G 89](#)):

- (1) Normalenvektor (↗ [MG 20](#)) \vec{n} von ε und Richtungsvektor \vec{a} von g ermitteln

- (2) Schnittwinkel ψ aus $\sin \psi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| |\vec{a}|}$

(Skalarprodukt ↗ [MG 14](#); Betrag eines Vektors ↗ [MG 16](#)) berechnen.

Merkzettel MG 35:

Winkel zwischen zwei einander schneidenden Ebenen berechnen

- Zwei einander schneidende Ebenen ε_1 und ε_2 sind durch Gleichungen gegeben

Arbeitsschritte (↗ [Lehrbuch, Beispiel G 89](#)):

- (1) Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 von ε_1 und ε_2 ermitteln (↗ [MG 20](#))

(2) ψ aus $\cos \psi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

(*Skalarprodukt* ↗ [MG 14](#), *Betrag eines Vektors* ↗ [MG 16](#)) berechnen

Merkzettel MG 36:

Abstand zueinander paralleler Geraden ermitteln

- für zwei zueinander parallele Geraden g_1 und g_2 der Ebene

Weg 1:

- (1) Punkt P auf g_1 (oder g_2) bestimmen
- (2) Anstieg (Richtungsvektor) der Senkrechten zu (Normalen von) g_1 (oder g_2) berechnen (↗ MG 27/ MG 20)
- (3) Gleichung der Senkrechten n zu (Normalen n von) g_1 (oder g_2) aufstellen (↗ MG 9)
- (4) Schnittpunkt S von n und g_2 (oder g_1) berechnen (↗ MA 3)
- (5) Abstand von S zu P als Abstand der Geraden g_1 und g_2 berechnen (↗ MG 17)

Weg 2 (↗ Lehrbuch, S. 320/321)

- (1) Punkt P auf g_1 (oder g_2) bestimmen
- (2) Abstand zur Geraden g_2 (oder g_1) berechnen (↗ MG 21)

- für zwei zueinander parallele Geraden g_1 und g_2 im Raum

- (1) Punkt P auf g_1 oder g_2 bestimmen
- (2) Abstand (↗ MG 21) zur jeweiligen anderen Geraden berechnen (↗ auch Lehrbuch, Beispiel G 75, sowie S. 341)

Merkzettel MG 37:

Abstand zueinander paralleler Ebenen ermitteln

- für zwei zueinander parallele Ebenen ε_1 und ε_2

(1) Punkt P auf ε_1 oder ε_2 bestimmen	(1) Punkt P auf ε_1 oder ε_2 bestimmen
(2) Abstand (↗ MG 22) zur jeweiligen anderen Ebene berechnen (↗ Lehrbuch, Abschnitt G 6.3)	(2) Abstand (↗ MG 22) zur jeweiligen anderen Ebene berechnen (↗ Lehrbuch, Abschnitt G 6.3)

Merkzettel MG 38:

Abstand von zwei zueinander windschiefen Geraden ermitteln

- für zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2

Weg 1:

- (1) Aus $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + t_1 \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t_2 \vec{a}_2$ Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 sowie Vektor $\overrightarrow{P_1 P_2}$ bestimmen (↗ MG 11)
- (2) Satz G 53 (↗ Lehrbuch, S. 342) anwenden (Skalarprodukt ↗ MG 14, Vektorprodukt ↗ MG 15)

Weg 2:

- (1) Aus $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + t_1 \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t_2 \vec{a}_2$ Einheitsnormalenvektor \vec{n}_0 (↗ MG 19, MG 20) mit $\vec{n}_0 \perp \vec{a}_1$ und $\vec{n}_0 \perp \vec{a}_2$ (Orthogonalität ↗ MG 12) bestimmen
- (2) Dann ist $d = |(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}_0|$ (Skalarprodukt ↗ MG 14).

Merkzettel MG 39:

Gleichung eines Kreises der Ebene aufstellen

- Kreis k in der Ebene

Weg 1:

Wenn Kreis k mit Mittelpunkt $M(c; d)$ und Radius r , so lautet die Gleichung k: $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ (Koordinatengleichung) (↗ [Lehrbuch, Satz G 40](#))

Weg 2:

Wenn Kreis k mit Ortsvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ seines Mittelpunkts und Radius r , so lautet die Gleichung k: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$. (Vektorgleichung) (↗ [Lehrbuch, Satz G 39](#))

Weg 3:

Es sei M der Mittelpunkt und X ein Punkt des Kreises k. Dann

- (1) r als Abstand von M und X berechnen (↗ [MG 17](#))
- (2) weiter wie *Weg 1/2*

Spezialfall: Wenn $M = O$, dann $x^2 + y^2 = r^2$ bzw. $\vec{x}^2 = r^2$.

Merkzettel MG 40: Gleichung einer Kugel aufstellen

- Kugel k des Raumes

Weg 1:

Wenn Kugel k mit Mittelpunkt $M(c; d; e)$ und Radius r , so lautet die Gleichung
 $k: (x - c)^2 + (y - d)^2 + (z - e)^2 = r^2$ (Koordinatengleichung) (↗ [Lehrbuch, Satz G 41](#))

Weg 2:

Wenn Kugel k mit Ortsvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ seines Mittelpunkts und Radius r , so lautet

die Gleichung $k: (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$. (Vektorgleichung) (↗ [Lehrbuch, Satz G 39](#))

Weg 3:

Es sei M der Mittelpunkt und X ein Punkt der Kugel k . Dann

- (1) r als Abstand von M und X berechnen (↗ [MG 17](#))
- (2) weiter wie *Weg 1/2*

Spezialfall: Wenn $M = O$, dann $k: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ bzw. $\vec{x}^2 = r^2$.

Merkzettel MG 41:**Aus der Gleichung eines Kreises dessen Mittelpunkt und Radius ermitteln**

<ul style="list-style-type: none">Kurve der Ebene ist gegeben durch $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$	Es handelt es sich um einen Kreis mit dem Mittelpunkt M(c; d) und dem Radius r (↗ MG 39).
<ul style="list-style-type: none">Kurve der Ebene ist gegeben durch $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ (*)	<p><i>Arbeitsschritte:</i></p> <ol style="list-style-type: none">a und b vergleichen Nur für a = b kann es sich um einen Kreis handeln (ansonsten um eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel (↗ CD-ROM, „Kegelschnitte“, Abschnitte 1.2, 2.2 und 3.2).Gleichung (*) durch a (= b) dividieren: Man erhält eine neue Gleichung der Form $x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0$ (**)(**) mittels quadratischer Ergänzung in die oben (↗ MG 39) angegebene Gestalt umformen: Man erhält: $(x + \frac{f}{2})^2 + (y + \frac{g}{2})^2 = -h + (\frac{f}{2})^2 + (\frac{g}{2})^2 = k$. <p>Für $k > 0$ ist (*) die Gleichung eines Kreises mit $M(-\frac{f}{2}; -\frac{g}{2})$ und $r = \sqrt{k}$.</p>

Merkzettel MG 42:**Lage eines Punktes bezüglich eines Kreises / einer Kugel untersuchen**

- Kreis k in der Ebene; Punkt $P(x_1; y_1)$

Arbeitsschritte:

- (1) Gleichung des Kreises in die Form $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ bringen (↗ MG 41).
- (2) Koordinaten des gegebenen Punktes $P(x_1; y_1)$ für x und y in $(x - c)^2 + (y - d)^2 = s$ einsetzen
- (3) $s = r^2$ P ist ein Punkt des Kreises k .
 $s > r^2$ P liegt außerhalb des Kreises k .
 $s < r^2$ P liegt innerhalb des Kreises k .

- Kugel k im Raum; Punkt $P(x_1; y_1; z_1)$

Arbeitsschritte:

- (1) Gleichung der Kugel in die Form $(x - c)^2 + (y - d)^2 + (z - e)^2 = r^2$ bringen (↗ MG 41).
- (2) Koordinaten des gegebenen Punktes $P(x_1; y_1; z_1)$ für x , y bzw. z in $(x - c)^2 + (y - d)^2 + (z - e)^2 = s$ einsetzen.
- (3) $s = r^2$ P ist ein Punkt der Kugel k .
 $s > r^2$ P liegt außerhalb der Kugel k .
 $s < r^2$ P liegt innerhalb der Kugel k .

Merkzettel MG 43:

Lagebeziehung von Kreis und Gerade untersuchen

Kreis k und Gerade g können

- a) genau einen gemeinsamen Punkt (Tangente ↗ MG 44),
 - b) keinen gemeinsamen Punkt oder
 - c) genau zwei gemeinsame Punkte
- haben (↗ Lehrbuch, Abschnitt G 7.2).

Arbeitsschritte:

- (1) Kreis- und Geradengleichungen in Koordinatenschreibweise überführen (↗ MG 12) und als Gleichungssystem betrachten (↗ Lehrbuch, Beispiel G 79).
- (2) Die Geradengleichung nach einer Variablen umstellen und in die Kreisgleichung einsetzen. Man erhält eine quadratische Gleichung.
- (3) Besitzt diese Gleichung
 - *genau eine* Lösung, so ist g eine Tangente an k (und die erhaltene Lösung der Abszissen- bzw. Ordinatenwert des Berührungspunkts);
 - *keine* Lösung, so ist g eine Passante bez. k ;
 - *zwei Lösungen*, so ist g eine Sekante von k (und die erhaltenen Lösungen sind die Abszissen- bzw. Ordinatenwerte der Schnittpunkte von g mit k)

Merkzettel MG 44: Gleichungen der Tangenten an einen Kreis ermitteln

- Tangente in einem Punkt
 $P_0(x_0; y_0) \in k$ an einen Kreis k

Arbeitsschritte:

- (1) Aus Kreisgleichung Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius von k ermitteln (↗ MG 41)
- (2) Wenn Mittelpunkt $M(c; d)$, Radius r bekannt und $P_0(x_0; y_0) \in k$ gegeben, so ist
t: $(x_0 - c)(x - c) + (y_0 - d)(y - d) = r^2$ bzw.
 $(\vec{x} - \vec{p}_0)(\vec{p}_0 - \vec{m}) = r^2$
die Gleichung der Tangente in P_0 an k (↗ Lehrbuch, Satz G 46)

[Konstruktive Lösung:

Wenn Mittelpunkt $M(c; d)$, Radius r und $P_0(x_0; y_0) \notin k$, ($|\overline{MP_0}| > r$)

gegeben, so konstruiert man den Thaleskreis k_T über $\overline{MP_0}$. Die Schnittpunkte von k und k_T sind die Berührungspunkte T_1 und T_2 der gesuchten Tangenten an k . Die Koordinaten der Berührungspunkte T_1 und T_2 werden jeweils in die Gleichung für t (↗ Lehrbuch, Satz G 46) eingesetzt.]

- Tangente von einem Punkt
 $P_1(x_1; y_1)$ an einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M

Arbeitsschritte:

- (1) Gleichung (*) des Kreises k_T um den Mittelpunkt M_T von $\overline{MP_1}$ mit dem Radius $|\overline{MM_T}|$ (Thaleskreis) aufstellen.
- (2) Schnittpunktskoordinaten $(x_0; y_0)$ von k und k_T (= Koordinaten der Berührungspunkte T_1, T_2) ermitteln (↗ MA3). Dazu (quadratisches) Gleichungssystem aus den Gleichungen von k und k_T lösen.
- (3) Mittels (allgemeiner) Tangentengleichung (↗ MG 44) oder Zweipunktgleichung (↗ MG 9) gesuchte Tangentengleichung aufstellen

Merkzettel MG 45:

Lagebeziehung zweier Kreise der Ebene untersuchen

Zwei voneinander verschiedene Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 können

- a) genau einen gemeinsamen Punkt,
- b) keinen gemeinsamen Punkt oder
- c) genau zwei gemeinsame Punkte

haben (↗ [Lehrbuch, Abschnitt G 7.3](#)).

Arbeitsschritte (↗ [Lehrbuch, Beispiel G 81](#)):

Weg 1:

- a) $k_1 \cap k_2 = \{P\} \Leftrightarrow |M_1M_2| = r_1 + r_2$ oder $0 < |M_1M_2| = |r_1 - r_2|$
- b) $k_1 \cap k_2 = \emptyset \Leftrightarrow |M_1M_2| > r_1 + r_2$ oder $0 \leq |M_1M_2| < |r_1 - r_2|$
- c) $k_1 \cap k_2 = \{P; Q\} \Leftrightarrow r_1 - r_2 < |M_1M_2| < r_1 + r_2$

Weg 2:

- (1) Beide Kreisgleichungen in Koordinatenschreibweise (↗ [MG 39](#)) überführen (↗ [MG 12](#)) und als Gleichungssystem betrachten.
- (2) Die eine (quadratische) Gleichung von der anderen subtrahieren und die erhaltene lineare Gleichung nach einer Variablen umstellen.
- (3) Die umgestellte Gleichung in eine der beiden Kreisgleichungen einsetzen. Man erhält eine quadratische Gleichung.
- (4) Besitzt diese Gleichung
 - genau eine Lösung, so berühren die beiden Kreise einander (und die erhaltene Lösung ist der Abszissen- bzw. Ordinatenwert des Berührungspunkts);
 - keine Lösung, so besitzen die beiden Kreise keinen gemeinsamen Punkte; bei übereinstimmenden Mittelpunkten und $r_1 \neq r_2$ sind die Kreise konzentrisch)
 - zwei Lösungen, so schneiden die beiden Kreise einander (und die erhaltene Lösungen sind die Abszissen- bzw. Ordinatenwerte der Schnittpunkte)

Merkzettel MG 46:

Lagebeziehung von Kugel und Gerade untersuchen

Kugel k und Gerade g im Raum können

- a) genau einen gemeinsamen Punkt,
- b) keinen gemeinsamen Punkt oder
- c) genau zwei gemeinsame Punkte

haben (↗ [Lehrbuch, Abschnitt G 7.4](#)).

Arbeitsschritte (↗ [Lehrbuch, Beispiel G 83](#)):

- (1) Gleichung der Geraden $g: \vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a}$ in der ausführlichen Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 + ta_x \\ y_0 + ta_y \\ z_0 + ta_z \end{pmatrix}$ schreiben.
- (2) Koordinaten von \vec{x} in die Koordinaten- oder Vektorgleichung der Kugel k einsetzen. Man erhält eine quadratische Gleichung für den Parameter t .
- (3) Parameter t berechnen.
- (4) Besitzt diese Gleichung
 - *genau eine* Lösung, so ist g eine Tangente an k ;
 - *keine* Lösung, so ist g eine Passante bez. k ;
 - *zwei* Lösungen, so ist g eine Sekante von k

Gegebenenfalls:

- (5) Werte für t in Gleichung von g einsetzen, um die Koordinaten des Berührungspunktes/ der Schnittpunkte zu ermitteln

Merkzettel MG 47:

Lagebeziehung von Kugel und Ebene untersuchen

Kugel k und Ebene ε im Raum können

- a) genau einen gemeinsamen Punkt (ε ist Tangentialebene an k)
- b) keinen gemeinsamen Punkt oder
- c) einen Kreis als Schnittfigur

besitzen (↗ [Lehrbuch, Abschnitt G 7.5](#)).

Arbeitsschritte:

- (1) Man berechnet den Abstand d des Mittelpunktes M von k zur Ebene ε (↗ [MG 22](#)).
 - Ist $d(M, \varepsilon) = r$, dann liegt Fall a) vor,
 - ist $d(M, \varepsilon) > r$, dann liegt Fall b) vor,
 - ist $d(M, \varepsilon) < r$, dann liegt Fall c) vor.

Fall a):

- (2) Ist $d(M, \varepsilon) = r$, dann zur Berechnung des gemeinsamen Punktes folgendermaßen vorgehen:
 - (2a) Gleichung der Geraden g durch M mit Normalenvektor von ε (↗ [MG 20](#)) als Richtungsvektor aufstellen
 - (2b) Schnittpunkt von g mit ε (= Durchstoß- bzw. Berührungspunkt) ermitteln (↗ [MG 30](#))
- (3) Gegebenfalls Gleichung der Tangentialebene aufstellen (↗ [MG 48](#))

Fall c):

- (2) Ist $d(M, \varepsilon) < r$, dann zur Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises folgendermaßen vorgehen (↗ [Lehrbuch, Beispiel G 86](#)):
 - (2a) Gleichung der Geraden g durch M mit Normalenvektor von ε (↗ [MG 20](#)) als Richtungsvektor aufstellen
 - (2b) Schnittpunkt von g mit ε (↗ [MG 30](#)) berechnen. Dieser Schnittpunkt/ Durchstoßpunkt ist der Mittelpunkt des Schnittkreises
- (3) Radius r_s des Schnittkreises mit Satz des PYTHAGORAS berechnen: $r_s = \sqrt{r^2 - (d(M, \varepsilon))^2}$

Merkzettel MG 48:

Gleichung der Tangentialebene an eine Kugel aufstellen

- Tangentialebene in einem Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0) \in k$ an eine Kugel k

Arbeitsschritte:

- (1) Aus Kugelgleichung Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius von k ermitteln (↗ MG 40, MG 41)
- (2) Wenn Mittelpunkt $M(c; d; e)$ bzw. \vec{m} sowie Radius r bekannt und $P_0(x_0; y_0; z_0) \in k$ gegeben, so ist
 $\epsilon: (\vec{x} - \vec{p}_0)(\vec{p}_0 - \vec{m}) = 0$ bzw.
 $(x_0 - c)(x - c) + (y_0 - d)(y - d) + (z_0 - e)(z - e) = r^2$
die Gleichung der Tangentialebene in P_0 an k
(↗ Lehrbuch, Satz G 47; Beispiel G 84)

Merkzettel MG 49: Lagebeziehungen von Kugeln untersuchen

Zwei Kugeln k_1 und k_2 mit $r_1 > r_2$ können

- a) genau einen gemeinsamen Punkt (Berührungspunkt von innen oder außen)
- b) keinen gemeinsamen Punkt oder
- c) einen Kreis als Schnittfigur

besitzen (↗ [Lehrbuch, Abschnitt G 7.6](#)).

Arbeitsschritte:

- (1) Man berechnet den Abstand d (↗ [MG 17](#)) der beiden Mittelpunkte M_1 und M_2 .
 - Ist $d(M_1, M_2) = r_1 + r_2$, dann liegt Fall a) vor,
 - ist $d(M_1, M_2) > r_1 + r_2$ oder $d(M_1, M_2) < r_1 - r_2$, dann liegt Fall b) vor,
 - ist $d(M_1, M_2) < r_1 + r_2$ und $d(M_1, M_2) > r_1 - r_2$, dann liegt Fall c) vor.

Fall a):

- (2a) Ist $d(M_1, M_2) = r_1 + r_2$, dann Gleichung von Gerade g durch M_1 und M_2 mit Richtungsvektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ (↗ [MG 9, MG 11](#)) aufstellen

- (2b) Koordinaten von g in eine der beiden Kugelgleichungen einsetzen, den Parameter und daraus die Schnittkoordinaten (= Koordinaten des Berührungspunktes) berechnen

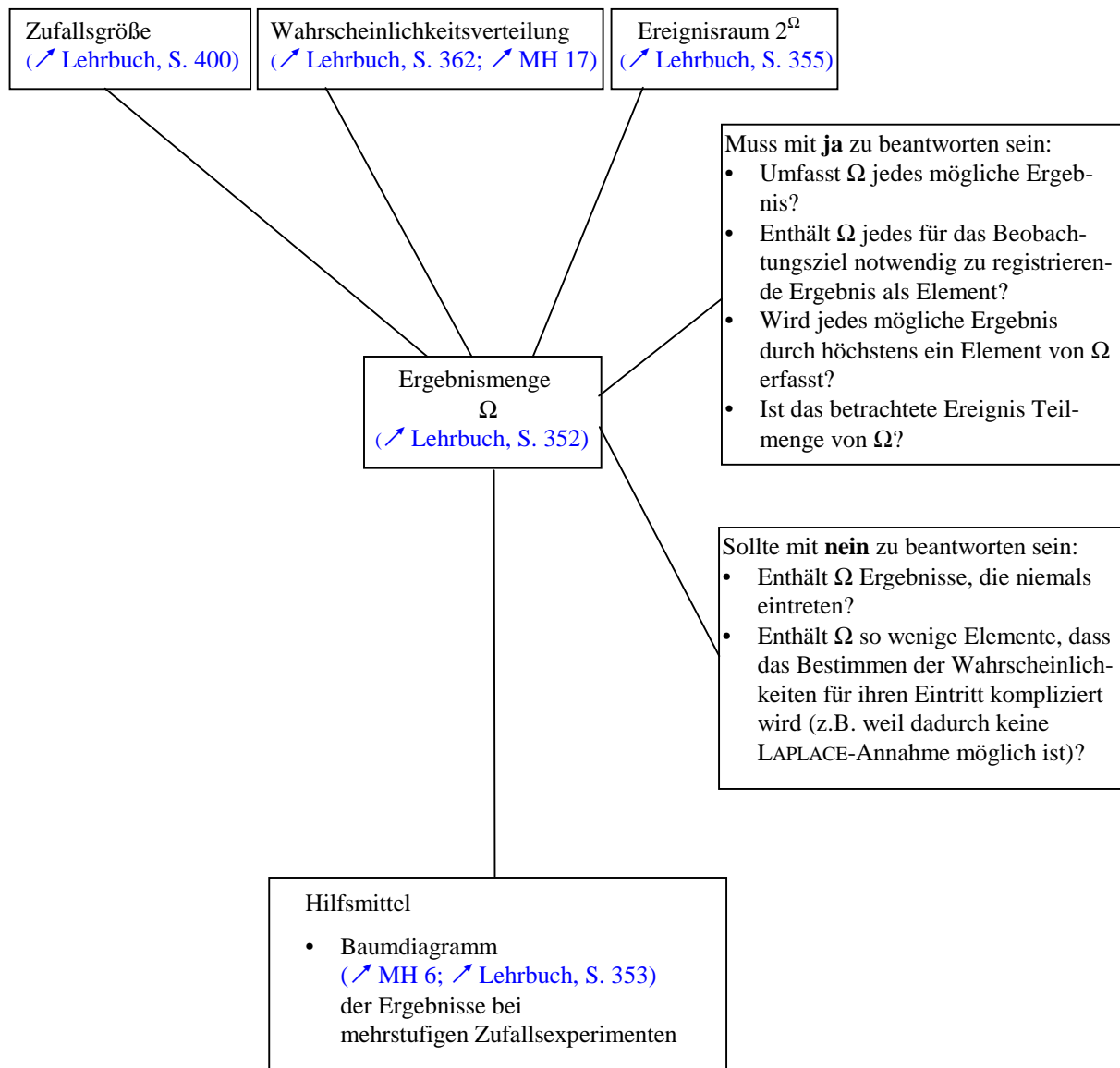
Fall c):

- (2a) Ist $d(M_1, M_2) < r_1 + r_2$ und $d(M_1, M_2) > r_1 - r_2$, dann beide Kugelgleichungen als Gleichungssystem betrachten und die quadratischen Glieder eliminieren
- (2b) Differenz der Kugelgleichungen ist Gleichung der Schnittebene ε
- (2c) Gleichung der Geraden g durch M_1 und M_2 mit Richtungsvektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ (↗ [MG 9, MG 11](#)) aufstellen;
(2d) Schnittpunkt von g mit der Ebene ε und damit Durchstoßpunkt D (= Mittelpunkt des Schnittkreises) berechnen
- (2e) Radius des Schnittkreises mit Satz des PYTHAGORAS berechnen: $r_s = \sqrt{r_1^2 - (d(M_1, D))^2}$

Fall b):

Ist $d(M_1, M_2) > r_1 + r_2$ oder $d(M_1, M_2) < r_1 - r_2$, dann s.o.
Es ergibt sich keine Lösung.

Merkzettel MH 1: Ergebnismenge ermitteln

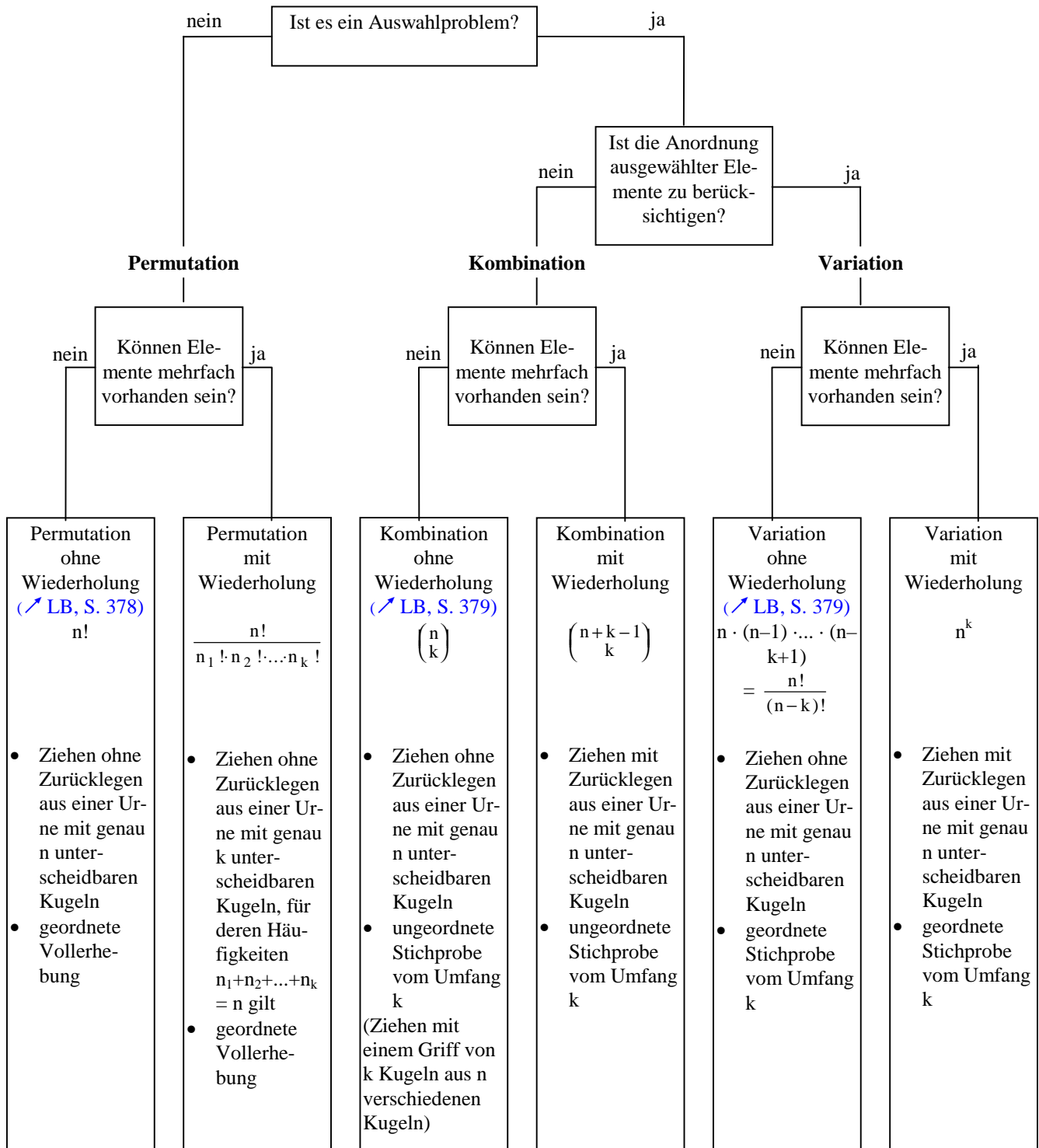


Merkzettel MH 2:

Möglichkeiten abzählen (Permutationen/Kombinationen/Variationen)

Hauptzählprinzip: (↗ Lehrbuch, S. 376)

Wird einer Urne eine geordnete Stichprobe vom Umfang n derart entnommen, dass sich für die k -te Ziehung ($k \in \{1; 2; \dots; n\}$) in der nichtleeren Urne genau m_k paarweise verschiedenfarbige Kugeln befinden, so gibt es dafür $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ Möglichkeiten.



Merkzettel MH 3:

Aus zwei Ereignissen zusammengesetzte Ereignisse beschreiben/veranschaulichen

(↗ Lehrbuch, S. 355)

Vierfeldertafel (↗ Lehrbuch, S. 365, ↗ MH 7)	VENN-Diagramm	Mengensymbolik	in Worten
		A	A
		$A \cap B$	A und B sowohl A als auch B
		$A \cap \bar{B}$	A und nicht B
		$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$	nicht A und nicht B weder A noch B A oder B tritt nicht ein keines der Ereignisse A, B
		$\bar{A} \cap B$	B und nicht A
		\bar{A}	nicht A das Gegenereignis von A das zu A komplementäre Ereignis
		$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$	entweder beide oder keines der Ereignisse A, B nicht genau eines der Ereignisse A, B
		$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$	entweder A oder B genau eines der Ereignisse A, B
		$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$	A oder B mindestens eines der Ereignisse A, B
		$A \cup \bar{B} = \overline{\bar{A} \cap B}$	A oder nicht B
		$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$	nicht A oder nicht B A und B nicht gleichzeitig höchstens eines der Ereignisse A, B
		$\bar{A} \cup B = \overline{A \cap \bar{B}}$	B oder nicht A

Merkzettel MH 4:

Aus drei Ereignissen zusammengesetzte Ereignisse beschreiben/veranschaulichen

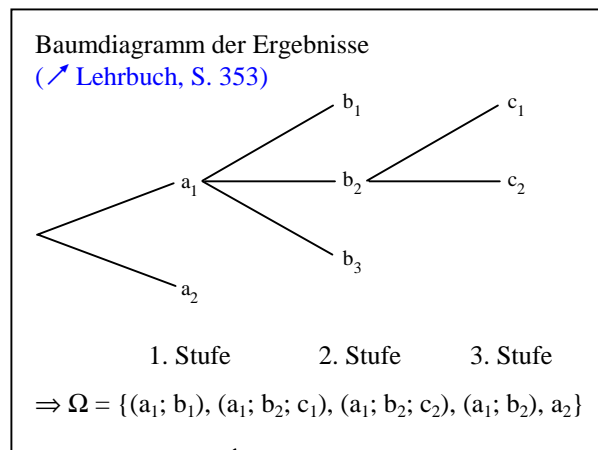
Achtfeldertafel (↗ LB, S. 366; ↗ MH 9)	VENN-Diagramm	Mengensymbolik	in Worten
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{shaded} & \text{shaded} \\ & \hline & \text{white} & \text{white} \\ \bar{A} \{ & \text{white} & \text{white} \\ & \hline & \text{shaded} & \text{shaded} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		\bar{C}	nicht C
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{white} & \text{white} \\ & \hline & \text{white} & \text{white} \\ \bar{A} \{ & \text{white} & \text{shaded} \\ & \hline & \text{white} & \text{white} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$	keines der Ereignisse A, B, C
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{shaded} & \text{shaded} \\ & \hline & \text{shaded} & \text{white} \\ \bar{A} \{ & \text{shaded} & \text{white} \\ & \hline & \text{white} & \text{white} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		$A \cup B \cup C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	A oder B oder C mindestens eines der Ereignisse A, B, C
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{white} & \text{shaded} \\ & \hline & \text{white} & \text{shaded} \\ \bar{A} \{ & \text{shaded} & \text{white} \\ & \hline & \text{shaded} & \text{white} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$	genau eines der Ereignisse A, B, C
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{white} & \text{shaded} \\ & \hline & \text{white} & \text{shaded} \\ \bar{A} \{ & \text{shaded} & \text{shaded} \\ & \hline & \text{shaded} & \text{white} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		$\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$	höchstens eines der Ereignisse A, B, C
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{shaded} & \text{shaded} \\ & \hline & \text{shaded} & \text{white} \\ \bar{A} \{ & \text{white} & \text{white} \\ & \hline & \text{white} & \text{white} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$	genau zwei der Ereignisse A, B, C
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{shaded} & \text{white} \\ & \hline & \text{shaded} & \text{white} \\ \bar{A} \{ & \text{shaded} & \text{white} \\ & \hline & \text{white} & \text{white} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$	mindestens zwei der Ereignisse A, B, C
$ \begin{array}{cc c} & B & \bar{B} \\ A \{ & \text{white} & \text{white} \\ & \hline & \text{shaded} & \text{white} \\ \bar{A} \{ & \text{white} & \text{white} \\ & \hline & \text{white} & \text{white} \end{array} \begin{array}{l} \bar{C} \\ \\ C \\ \bar{C} \end{array} $		$A \cap B \cap C$	A und B und C sowohl A als auch B und C alle drei Ereignisse A, B, C

Merkzettel MH 5:

Rechengesetze der Mengenalgebra auf Ereignisse anwenden

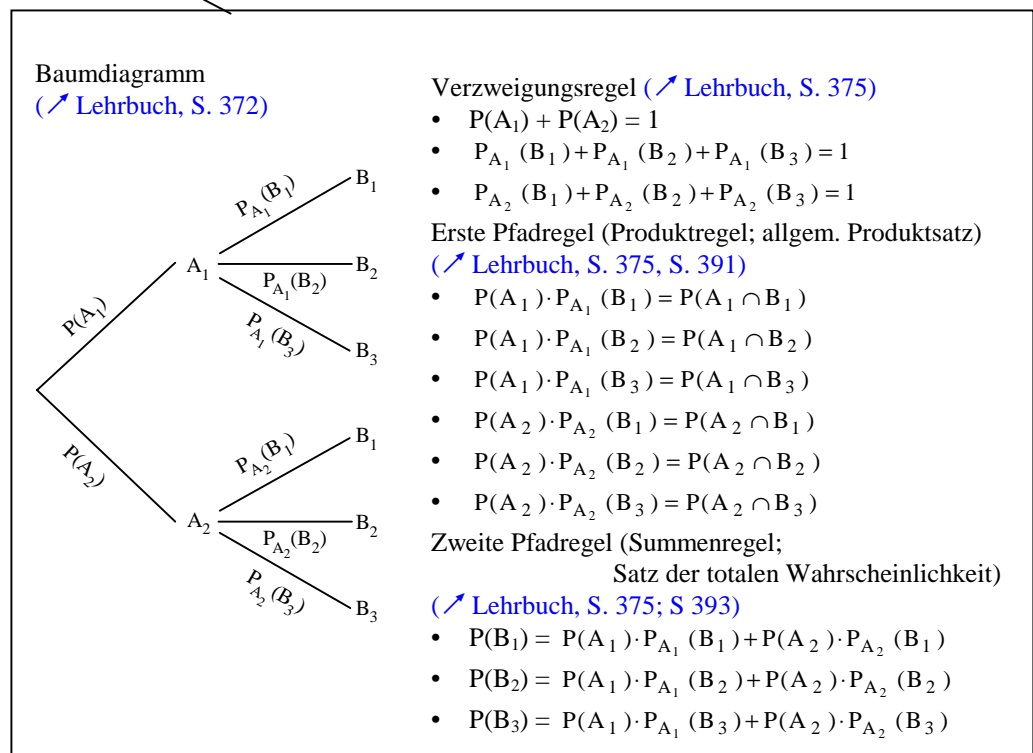
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		Assoziativgesetze
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		Distributivgesetze
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Dominanzgesetze
$A \cup \bar{A} = \Omega$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	Ereignis-Gegenereignis-Gesetze
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Erhaltungsgesetze
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Aufnahmegesetze (Absorptionsgesetze)
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	DE MORGANSCHER Regeln
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$		(Definition der Differenz)

Merkzettel MH 6: Baumdiagramm erstellen



Ergebnismenge Ω
(↗ MH 1; ↗ Lehrbuch, S. 352)

Baumdiagramm



Mehrfeldertafel
(↗ MH 7; ↗ MH 8; ↗ LB, S. 364)

bedingte Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$
(↗ Lehrbuch, S. 389)

Unabhängigkeit von Ereignissen
(↗ Lehrbuch, S. 396)

Merkzettel MH 7: Vierfeldertafel aufstellen

Vierfeldertafel durch zwei

Zerlegungen

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$\Omega = B \cup \bar{B}$$

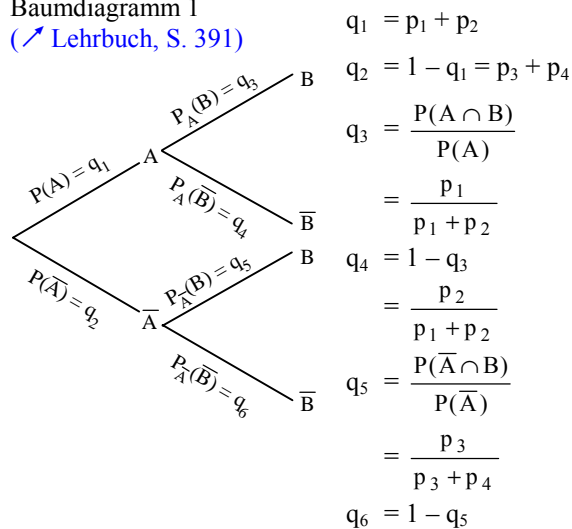
(↗ Lehrbuch, S. 364, ↗ MH 3)

		B	\bar{B}	
A		$P(A \cap B) = p_1$ $= q_1 \cdot q_3$ $= r_1 \cdot r_3$	$P(A \cap \bar{B}) = p_2$ $= q_1 \cdot q_4$ $= r_2 \cdot r_5$	$P(A) = p_1 + p_2$ $= 1 - P(\bar{A})$
\bar{A}		$P(\bar{A} \cap B) = p_3$ $= q_2 \cdot q_5$ $= r_1 \cdot r_4$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = p_4$ $= q_2 \cdot q_6$ $= r_2 \cdot r_6$	$P(\bar{A}) = p_3 + p_4$ $= 1 - P(A)$
		$P(B) = p_1 + p_3$ $= 1 - P(\bar{B})$	$P(\bar{B}) = p_2 + p_4$ $= 1 - P(B)$	Kontrolle: $1 = P(A) + P(\bar{A})$ $1 = P(B) + P(\bar{B})$ $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$

zugehöriges

Baumdiagramm 1

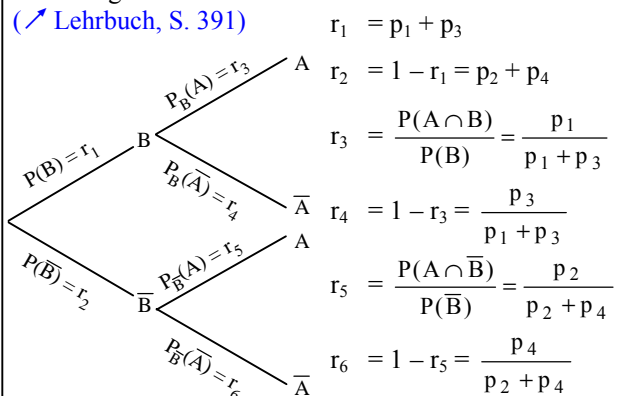
(↗ Lehrbuch, S. 391)



zugehöriges

Baumdiagramm 2

(↗ Lehrbuch, S. 391)



Obige Ansätze erhalten durch weiteres Umformen die Gestalt des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit bzw. der BAYESSchen Formel:

$$P(A) = p_1 + p_2$$

$$= r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_5$$

$$= P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A) \quad \text{Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (↗ Lehrbuch, S.393)}$$

$$P_A(B) = q_3 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

$$= \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_5}$$

$$= \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)} \quad \text{BAYESSche Formel (↗ Lehrbuch, S. 394)}$$

Merkzettel MH 8:
Mehrfeldertafel (mit zwei Zerlegungen) aufstellen

Sechsfeldertafel durch zwei Zerlegungen (↗ [Lehrbuch, S. 366](#))

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$\Omega = B \cup C \cup D \text{ mit } B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$$

	B	C	D	
A	$P(A \cap B) = p_1$ $= q_1 \cdot q_3$ $= r_1 \cdot r_4$	$P(A \cap C) = p_2$ $= q_1 \cdot q_4$ $= r_2 \cdot r_6$	$P(A \cap D) = p_3$ $= q_1 \cdot q_5$ $= r_3 \cdot r_8$	$P(A) = p_1 + p_2 + p_3$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B) = p_4$ $= q_2 \cdot q_6$ $= r_1 \cdot r_5$	$P(\bar{A} \cap C) = p_5$ $= q_2 \cdot q_7$ $= r_2 \cdot r_7$	$P(\bar{A} \cap D) = p_6$ $= q_2 \cdot q_8$ $= r_3 \cdot r_9$	$P(\bar{A}) = p_4 + p_5 + p_6$
	$P(B) = p_1 + p_4$	$P(C) = p_2 + p_5$	$P(D) = p_3 + p_6$	Kontrolle: $1 = P(A) + P(\bar{A})$ $1 = P(B) + P(C) + P(D)$ $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$

Achtfeldertafel

durch zwei
Zerlegungen

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$\Omega = B \cup C \cup D \cup E$$

mit

$$B \cap C = B \cap D$$

$$= B \cap E$$

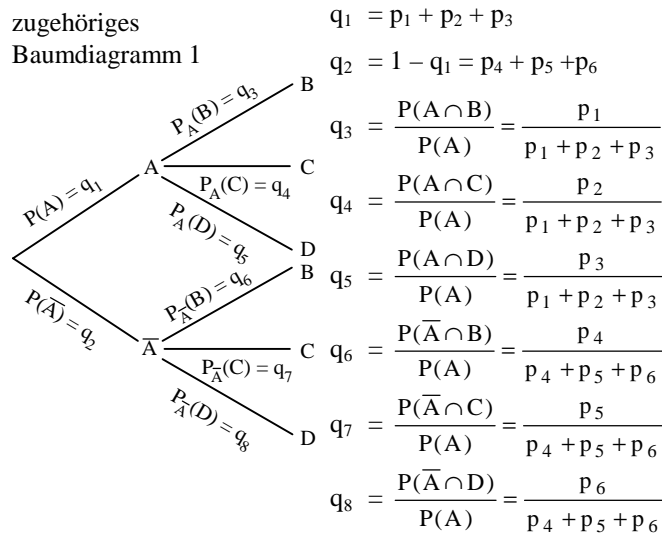
$$= C \cap D$$

$$= C \cap E$$

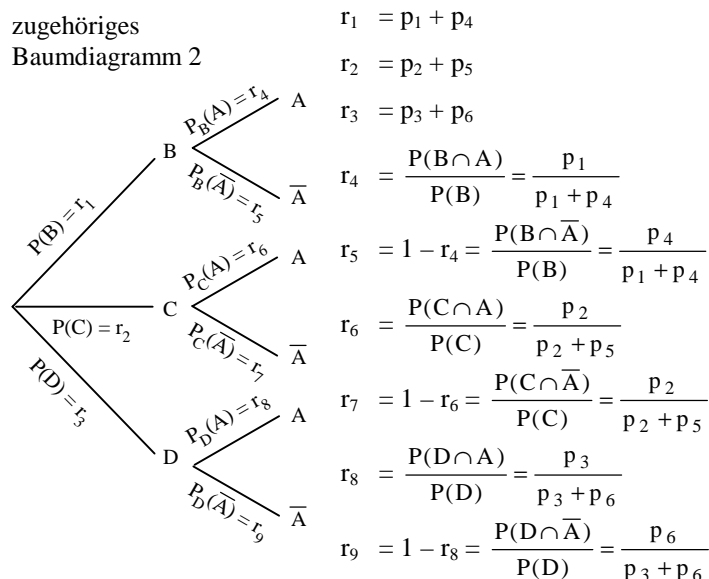
$$= D \cap E$$

$$= \emptyset$$

zugehöriges
Baumdiagramm 1



zugehöriges
Baumdiagramm 2



Merkzettel MH 9:

Achtfeldertafel (mit drei Zerlegungen) aufstellen

Achtfeldertafel durch drei Zerlegungen (↗ [Lehrbuch, S. 366, MH 4](#))

$$\Omega = A \cup \bar{A} \quad \Omega = B \cup \bar{B} \quad \Omega = C \cup \bar{C}$$

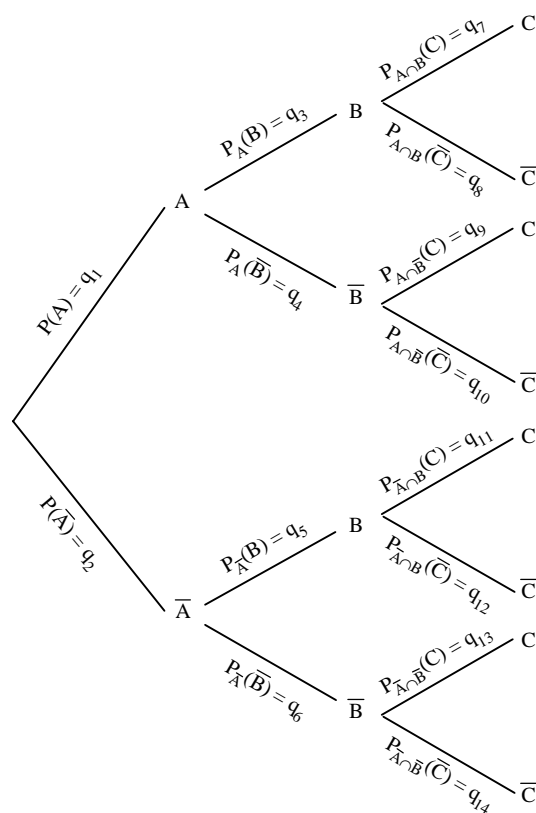
	B	\bar{B}	
A	$P(A \cap B \cap \bar{C})$ = p_1	$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ = p_2	\bar{C}
	$P(A \cap B \cap C)$ = p_3	$P(A \cap \bar{B} \cap C)$ = p_4	
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B \cap C)$ = p_5	$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$ = p_6	C
	$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$ = p_7	$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ = p_8	
			\bar{C}

$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 - P(\bar{A})$
 $P(\bar{A}) = p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1 - P(A)$
 $P(B) = p_1 + p_3 + p_5 + p_7 = 1 - P(\bar{B})$
 $P(\bar{B}) = p_2 + p_4 + p_6 + p_8 = 1 - P(B)$
 $P(C) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 - P(\bar{C})$
 $P(\bar{C}) = p_1 + p_2 + p_7 + p_8 = 1 - P(C)$

Kontrolle

$1 = P(A) + P(\bar{A})$
 $1 = P(B) + P(\bar{B})$
 $1 = P(C) + P(\bar{C})$
 $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8$

ein zugehöriges Baumdiagramm



$$q_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$

$$q_2 = p_5 + p_6 + p_7 + p_8$$

$$q_3 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(A)} = \frac{p_3 + p_1}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$$

$$q_4 = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})}{P(A)} = \frac{p_4 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$$

$$q_5 = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C})}{P(\bar{A})} = \frac{p_5 + p_7}{p_5 + p_6 + p_7 + p_8}$$

$$q_6 = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}{P(\bar{A})} = \frac{p_6 + p_8}{p_5 + p_6 + p_7 + p_8}$$

$$q_7 = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C})} = \frac{p_3}{p_3 + p_1}$$

$$q_8 = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C})} = \frac{p_1}{p_3 + p_1}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

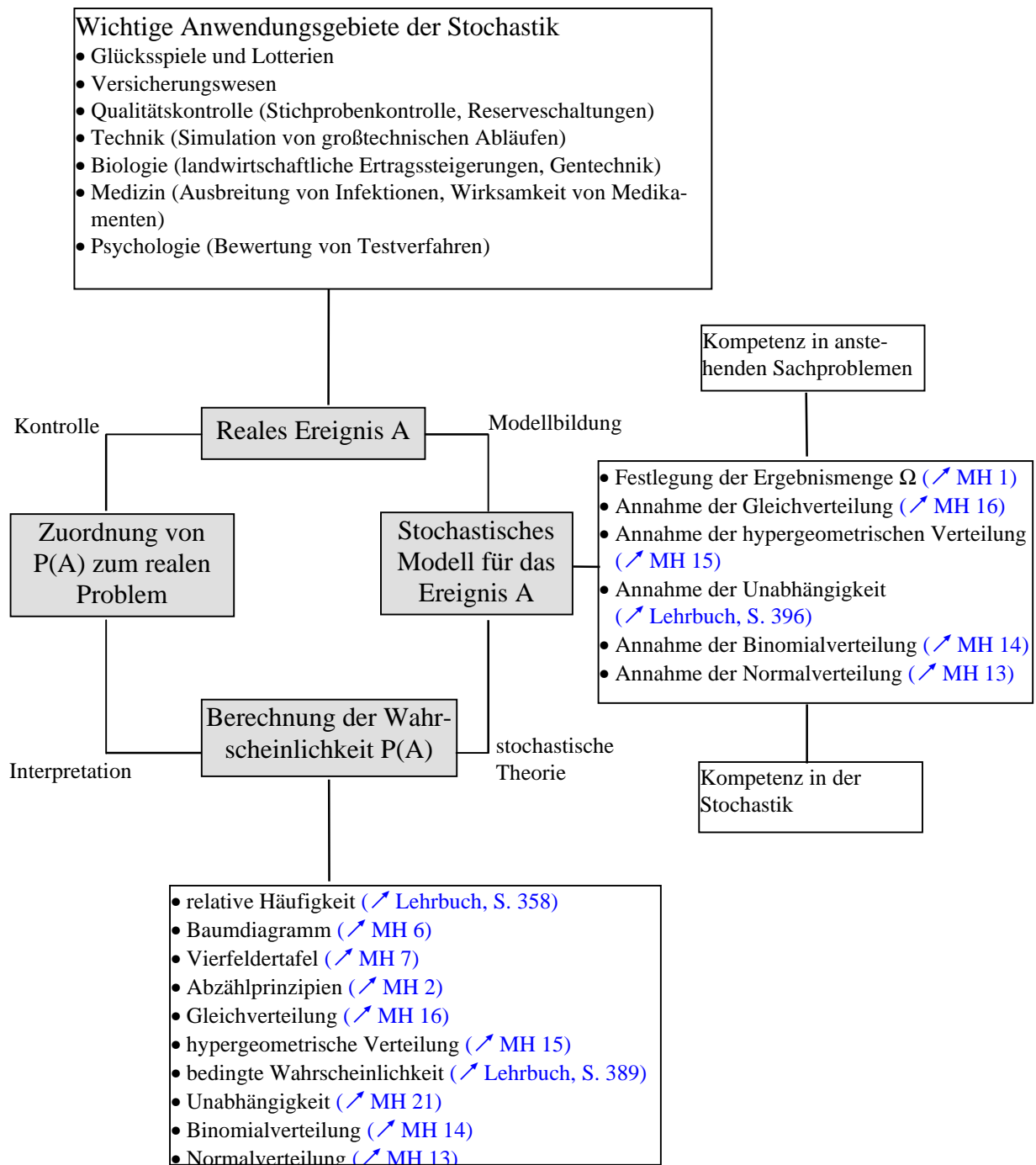
$$\cdot$$

$$q_{13} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)}{P(\bar{A} \cap \bar{B})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)}{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})} = \frac{p_6}{p_6 + p_8}$$

$$q_{14} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}{P(\bar{A} \cap \bar{B})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})} = \frac{p_8}{p_6 + p_8}$$

Merkzettel MH 10:

Reales zufälliges Ereignis untersuchen (Grundstrategie)



Merkzettel MH 11:

Urnenmodell konstruieren (↗ Lehrbuch, S. 381)

Z U F F A L L S E X P E R I M E N T	Einstufiges Zufalls- experiment (↗ LB, S. 352)	Einmaliges Ziehen aus einer Urne, bei der die endlich vielen Ergebnisse durch die <i>Kugelfarben</i> und die rationalwertigen Wahrscheinlichkeiten ihres Eintretens durch den jeweiligen Farbanteil beschrieben werden.					
		LAPLACE- Experiment mit $p = \frac{1}{n}$ <ul style="list-style-type: none">• n verschiedenfarbige Kugeln• n durchnummerierte Kugeln (↗ LB S. 367)		BERNOULLI- Experiment mit $p = \frac{M}{N}$ <ul style="list-style-type: none">• M rote und N – M weiße Kugeln (↗ LB S. 415)		...	
	n-stufiges Zufalls- experiment (↗ LB S. 353)	n-maliges Ziehen aus einer Urne, deren Inhalt vor jeder Ziehung der entsprechenden Stufe des Zufallsexperiments angepasst wird wie bei einem einstufigen Zufallsexperiment.					
		Ziehen nacheinander; geordnete Stichprobe			ungeordnete Stichprobe		
	mit Zurück- legen	ohne Zurück- legen	...	mit Zurück- legen	ohne Zurück- legen	...	

Simulation

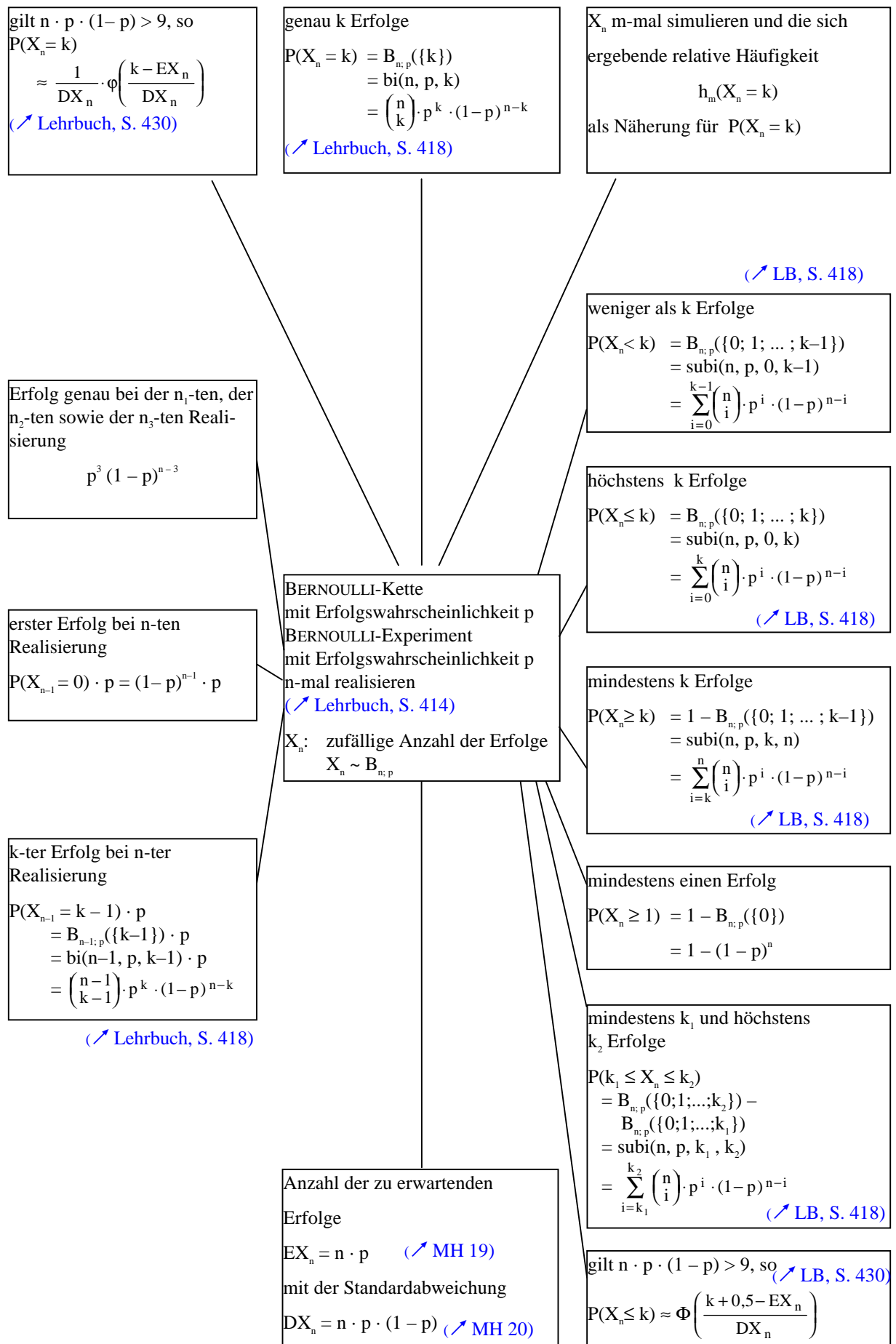
Baumdiagramm

- 1. Pfadregel
- 2. Pfadregel
(↗ MH 6)

Zählprinzipien
(↗ MH 2)

Merkzettel MH 12:

Wahrscheinlichkeiten für k Erfolge bei einer BERNOULLI-Kette ermitteln



Merkzettel MH 13:

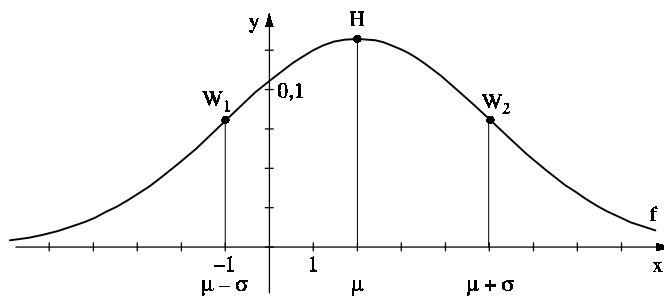
Modellannahme Zufallsgröße X ist normalverteilt rechtfertigen

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße ([Lehrbuch, S. 430](#); [MH 14](#)) mit einer Streuung größer als 9 kann man durch eine Normalverteilung annähern ([Lehrbuch, S. 430](#)):

$$Y \sim B_{n,p} \text{ mit } n \cdot p \cdot (1-p) > 9 \Rightarrow \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}} \sim N(0; 1^2)$$

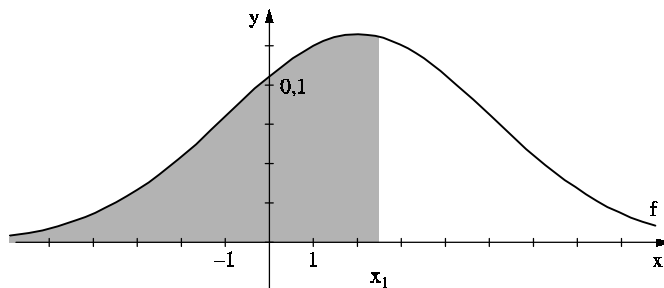
$$P(Y \leq k) = B_{n,p}(\{0; 1; \dots; k\}) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - EY}{\sqrt{D^2 Y}}\right) \text{ für } n \cdot p \cdot (1-p) > 9$$

- Die Dichtefunktion f ([Lehrbuch, S. 431](#)) von X ist (zumindest angenähert) eine Glockenkurve:



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Die Wahrscheinlichkeiten genügen (zumindest angenähert) dem Ansatz $P(X \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Ist die Zufallsgröße X normalverteilt mit den Parametern $EX = \mu$ und $D^2X = \sigma^2$, so ist die standardisierte Zufallsgröße $\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$ standardnormalverteilt ([Lehrbuch, S. 435](#)):

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)^2} d\tau = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Die Summe von n ($n > 50$) voneinander unabhängigen Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n ist annähernd normalverteilt (Zentraler Grenzwertsatz) ([Lehrbuch, S. 438](#)):

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - \sum_{i=1}^n EX_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n D^2 X_i}}\right)$$

Merkzettel MH 14:

Modellannahme Zufallsgröße ist $B_{n,p}$ -verteilt rechtfertigen

- Dem Zufallsexperiment entspricht folgendes Urnenmodell:

Einer Urne mit genau N Kugeln (M weißen, $N - M$ roten) werden nacheinander genau n Kugeln „auf gut Glück“ und *mit* Zurücklegen entnommen.

X : zufällige Anzahl der herausgegriffenen weißen Kugeln

$$p = \frac{M}{N}$$

- Es ist eine Stichprobe *mit* Zurücklegen.

Ist der Stichprobenumfang n sehr klein im Vergleich zur Anzahl N aller Kugeln, so kann man eine Kugellentnahme **ohne** Zurücklegen annähernd gleichsetzen einer Entnahme **mit** Zurücklegen,

d.h. $P(X = k) \approx B_{n, \frac{M}{N}}(\{k\})$. (↗ MH 15)

- Wird ein BERNOULLI-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p n -mal und unabhängig voneinander realisiert, so ist die zufällige Anzahl X der eingetretenen Erfolge binomialverteilt mit den Parametern n und p , d.h. $X \sim B_{n,p}$ (↗ Lehrbuch, S. 415).
- Es gilt $P(X = k) = B_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. (↗ Lehrbuch, S. 417)
- Der Erwartungswert beträgt $EX = n \cdot p$. (↗ Lehrbuch, S. 425; MH 19)
- Die Streuung (Varianz) beträgt $D^2X = n \cdot p \cdot (1-p)$. (↗ Lehrbuch, S. 426; MH 20)

Näherungsmodell: Normalverteilung (↗ Lehrbuch, S. 433; MH 13)

$$P(X \leq k) = B_{n,p}(\{0; 1; \dots; k\}) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \quad \text{für } n \cdot p \cdot (1-p) > 9$$

Merkzettel MH 15:

Modellannahme Zufallsgröße X ist hypergeometrisch verteilt rechtfertigen

- Dem Zufallsexperiment entspricht folgendes Urnenmodell ([↗ Lehrbuch, S. 384](#)):
Einer Urne mit genau N Kugeln (M weißen, $N - M$ roten) werden genau n Kugeln „auf gut Glück“ und *ohne* Zurücklegen entnommen.
 X : zufällige Anzahl der herausgegriffenen weißen Kugeln
- Es ist eine Stichprobe *ohne* Zurücklegen.
- Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich nach der Formel $P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$
- Der Erwartungswert beträgt $EX = n \cdot \frac{M}{N}$.
- Die Streuung beträgt $D^2X = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$.

Näherungsmodell: Binomialverteilung ([↗ Lehrbuch, S. 417](#))

Gilt für das angemessene Urnenmodell, dass die Anzahl n der entnommenen Kugeln sehr klein ist im Vergleich zur Anzahl aller Kugeln, so kann man die Kugellentnahme *ohne* Zurücklegen annähernd gleichsetzen einer Entnahme *mit* Zurücklegen,

d.h., es gilt $P(X = m) \approx B_{n; \frac{M}{N}}(\{m\})$.

Merkzettel MH 16:

Modellannahme Zufallsgröße X ist gleichverteilt rechtfertigen

Urnenmodell:

(↗ Lehrbuch, S. 381)

Einer Urne mit genau n durchnummerierten (ansonsten nicht unterscheidbaren) Kugeln wird "auf gut Glück" eine Kugel entnommen.

X : zufällige Nummer der herausgegriffenen Kugel

$$|\Omega| = n$$

Wahrscheinlichkeit atomarer Ereignisse:

(↗ Lehrbuch, S. 363)

$$P(X = k) = P(\{k\}) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } k \in W_X = \{1; 2; \dots; n\}$$

bzw. $k \in \Omega$ mit $|\Omega| = n$

Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

(↗ Lehrbuch, S. 363)

Erwartungswert:

$$EX = \frac{n+1}{2}$$

(↗ Lehrbuch, S. 402, MH 19)

Streuung (Varianz):

$$D^2X = \frac{n^2 - 1}{12}$$

(↗ Lehrbuch, S. 407)

Geometrie des Zufallsgenerators:

Münze, Tetraeder, Würfel, ... (keine der zwei, vier, sechs, ... Seitenflächen ist infolge inhomogener Massenverteilung bzw. unzureichender Symmetrie beim Auffallen bevorteilt)

Signalwörter:

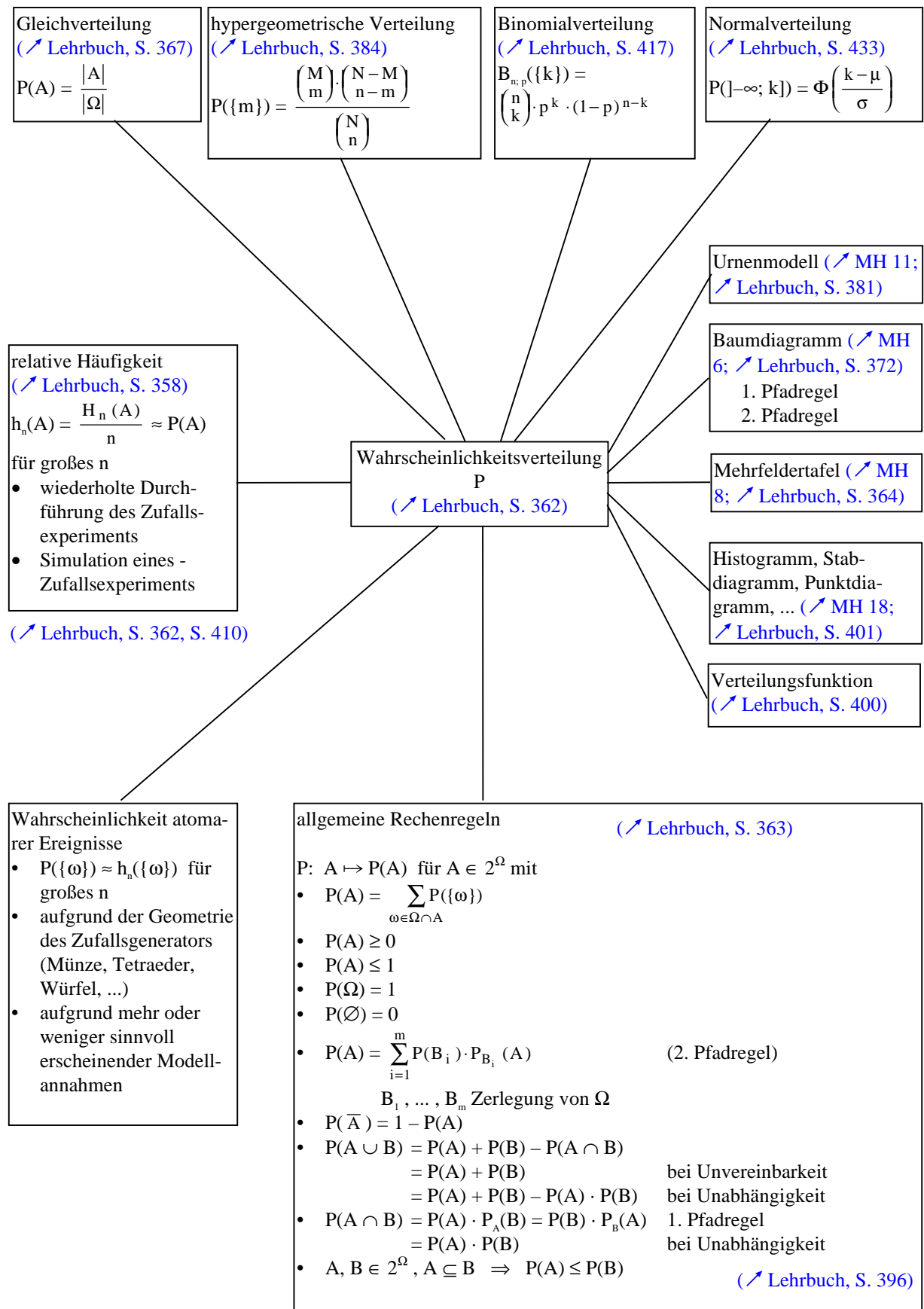
auf gut Glück, rein zufällig, wahllos, nicht manipuliert, ideal, fair, LAPLACE-Würfel, L-Würfel, blind entnommen, gleiche Chance, ...

Erste Modellannahme:

Unter der LAPLACE -Annahme rechnet man das Modell durch bzw. simuliert es, um die vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten bzw. relativen Häufigkeiten mit den entsprechenden erhaltenen Ergebnissen zu vergleichen.

Merkzettel MH 17:

Wahrscheinlichkeitsverteilung ermitteln

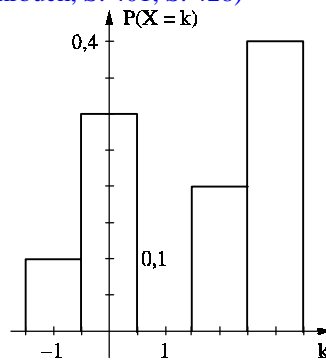


Merkzettel MH 18: Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen

endliche
Zufallsgröße X
(↗ LB, S. 400)

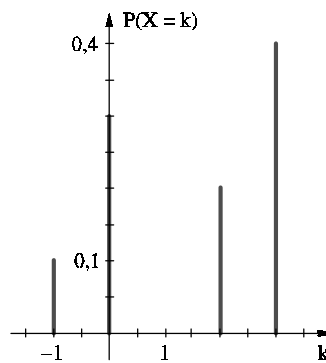
- Wertetabelle

x_i	-1	0	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,2	0,4
- zweizeilige Matrix $X \triangleq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$ (↗ Lehrbuch, S. 401)
- Histogramm (↗ Lehrbuch, S. 401, S. 428)



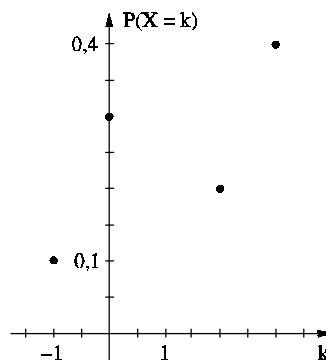
Rechteckflächeninhalt zum Wert k ist gleich $P(X = k)$.

- Stabdiagramm



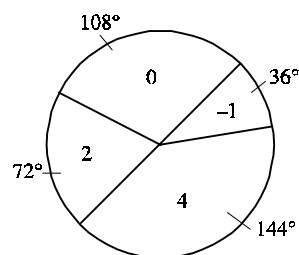
Stablänge zum Wert k ist gleich $P(X = k)$.

- Punktdiagramm



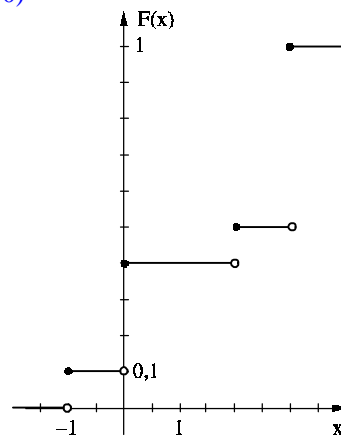
Zum Wert k gehört der Punkt $(k; P(X = k))$.

- Kreisdiagramm



Zum Wert k gehört der Sektor mit dem Öffnungswinkel
 $\alpha = P(X = k) \cdot 360^\circ$

- Verteilungsfunktion
(↗ Lehrbuch, S. 400)

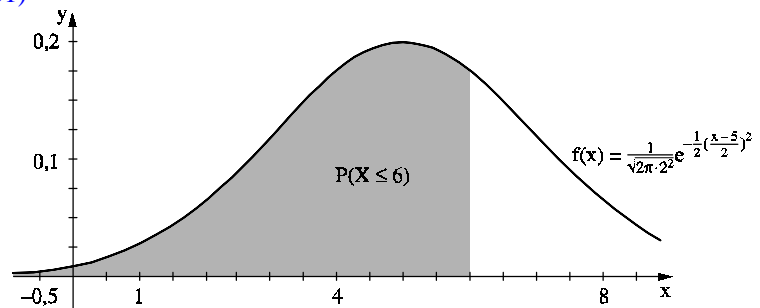


Funktionswert an der Stelle k ist $F(k) = P(X \leq k)$

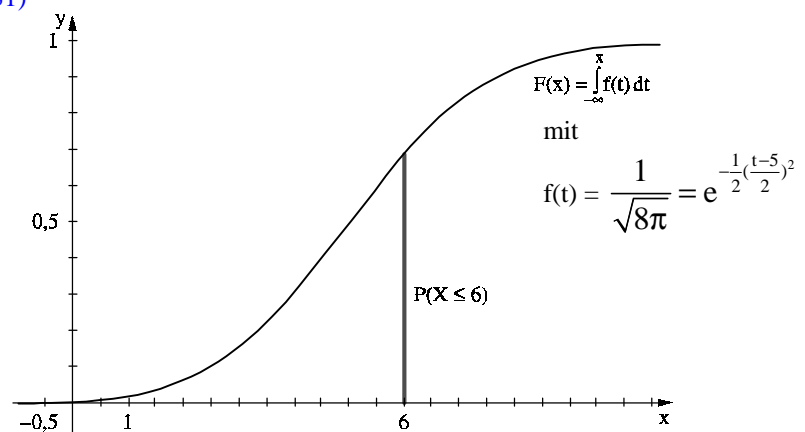
- Kenngrößen $EX = 1,5$; $D^2X = 2,25$
(↗ MH 19, MH 20; ↗ Lehrbuch, S. 402, 407)

stetige
Zufallsgröße X
(↗ LB, S. 431)

- Dichtefunktion f
(↗ Lehrbuch, S. 431)



- Verteilungsfunktion F
(↗ Lehrbuch, S. 431)



- Wertetabelle für ausgewählte X-Werte in Tafelwerken, z.B. für ϕ und Φ von $X \sim N(0; 1^2)$
- Kenngrößen $EX = 5$; $D^2X = 4$
(↗ MH 19, MH 20; ↗ Lehrbuch, S. 431, 407)

Merkzettel MH 19: Erwartungswert berechnen

X endliche Zufallsgröße

$$X \triangleq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 402})$$

X stetige Zufallsgröße
mit Dichtefunktion f

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 431})$$

$$E(aX + b) = a \cdot EX + b \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 404})$$

$$E(X + Y) = EX + EY \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 405})$$

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY, \text{ wenn } X, Y \text{ unabhängig} \quad (\nearrow \text{Lehrbuch, S. 406})$$

- Gleichverteilung ([↗ Lehrbuch, S. 367, MH 16](#))

$$p_k = \frac{1}{n} \Rightarrow EX = \frac{n+1}{2}$$

- hypergeometrische Verteilung ([↗ LB, S. 384, MH15](#))

$$p_k = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \Rightarrow EX = n \cdot \frac{M}{N}$$

- Binomialverteilung ([↗ Lehrbuch, S. 417, MH 14](#))

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \Rightarrow EX = n \cdot p$$

- Normalverteilung ([↗ Lehrbuch, S. 433, MH 13](#))

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow EX = \mu$$

Merkzettel MH 20:

Steuerung / Varianz berechnen

X endliche Zufallsgröße $X \triangleq \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$	X stetige Zufallsgröße mit Dichtefunktion f
$D^2X = E(X - EX)^2$ $= \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2 \cdot p_i \quad (\text{Lehrbuch, S. 407})$ $= EX^2 - (EX)^2$	$D^2X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$
$D^2(aX + b) = a^2 \cdot D^2X \quad (\text{Lehrbuch, S. 409})$ $D^2(X + Y) = D^2X + D^2Y, \text{ wenn } X, Y \text{ unabhängig} \quad (\text{Lehrbuch, S. 409})$	
<ul style="list-style-type: none"> Gleichverteilung (Lehrbuch, S. 367, MH 16) $p_k = \frac{1}{n} \Rightarrow D^2X = \frac{n^2 - 1}{12}$ hypergeometrische Verteilung (LB, S. 384, MH15) $p_k = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $\Rightarrow D^2X = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$ Binomialverteilung (Lehrbuch, S. 417, MH 14) $p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $\Rightarrow D^2X = n \cdot p \cdot (1-p)$ 	<ul style="list-style-type: none"> Normalverteilung (Lehrbuch, S. 433, MH 13) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow D^2X = \sigma^2$

Merkzettel J 1:

Binomialverteilung erkennen

Erkennen der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße als **Binomialverteilung** ↗ [MH 14](#)

- Es liegt ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ergebnissen vor.
- Das Zufallsexperiment besteht aus n voneinander unabhängigen Durchführungen, d.h.:
Auf jeder der n Stufen des Zufallsexperiments bleibt die Wahrscheinlichkeit beider Ergebnisse unverändert (**BERNOULLI-Experiment** / **BERNOULLI-Kette**) ↗ [MH 12](#).

Merkzettel J 2:

Binomialverteilung durch Normalverteilung approximieren

Approximation einer **Binomialverteilung** ↗ [MJ 1](#) einer Zufallsgröße X durch **Normalverteilung** ↗ [MH 13](#)

Empirische Kriterien:

$$\sigma^2 = V(X) > 9$$

$$\sigma^2 = V(X) - \text{Varianz}; \quad n - \text{Stichprobenumfang}$$

$$\sigma^2 = V(X) \geq \frac{1}{2} \sqrt{n}$$

Die Approximation ist möglich, wenn eines der beiden Kriterien erfüllt ist. Im Interesse einer hinreichend genauen Approximation sollten möglichst beide Kriterien erfüllt sein.

Approximation bei linksseitigem Ablehnungsbereich \bar{A} :

$$P(X \leq k) = B_{n,p}(\{0; 1; \dots; k\}) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) \leq \alpha$$

Approximation bei rechtsseitigem Ablehnungsbereich \bar{A} :

$$P(X \geq k) = 1 - B_{n,p}(\{0; 1; \dots; k-1\}) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k-1 + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) \leq \alpha; \quad \Phi\left(\frac{k-1 + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) \geq 1 - \alpha$$

Merkzettel J 3:

Unbekannte Wahrscheinlichkeit testen (Übersicht)

- **Alternativtest** („besonderer“ Signifikanztest) ↗ [MJ 7](#)

Untersuchung von zwei einfachen (spezifizierten), konkurrierenden Hypothesen;

$$H_0: p = p_0 \text{ und } H_1: p = p_1$$

$$p_0 > p_1 \quad \textbf{linksseitiger Test;}$$

Kleine Werte der Zufallsgröße X
sprechen gegen die Nullhypothese H_0 .

$$p_0 < p_1 \quad \textbf{rechtsseitiger Test}$$

Große Werte der Zufallsgröße X
sprechen gegen die Nullhypothese H_0 .

- **Signifikanztest** („normaler“ Signifikanztest) ↗ [MJ 6](#)

Im Prinzip Untersuchung nur einer Hypothese, der Nullhypothese (einfach oder zusammengesetzt);
die konkurrierende Hypothese ist nicht spezifiziert

$$H_0: p = p_0$$

$$[H_1: p \neq p_0] \quad \text{zweiseitiger Test}$$

Sowohl große als auch kleine Werte der Zufallsgröße X sprechen gegen die Nullhypothese H_0 .

$$H_0: p \geq p_0$$

$$[H_1: p < p_0] \quad \text{einseitiger, linksseitiger Test}$$

Kleine Werte der Zufallsgröße X sprechen gegen die Nullhypothese H_0 .

$$H_0: p \leq p_0$$

$$[H_1: p > p_0] \quad \text{einseitiger, rechtsseitiger Test}$$

Große Werte der Zufallsgröße X sprechen gegen die Nullhypothese H_0 .

- Mögliche Fehlentscheidungen bei Alternativ- / Signifikanztests

Fehler 1. Art und Fehler 2. Art ↗ [MJ 4](#)

Merkzettel J 4:**Mögliche Fehleinschätzungen bei Testen von Hypothesen unterscheiden**

Fehler beim Testen von Hypothesen

	Hypothese H_0 in Wirklichkeit	
	wahr	falsch
H_0 wird abgelehnt	Entscheidung falsch Fehler 1. Art	Entscheidung richtig
H_0 wird nicht abgelehnt	Entscheidung richtig	Entscheidung falsch Fehler 2. Art

Die **Berechnung des Fehlers 1. Art** ↗ [MJ 5](#) ist sowohl bei **Alternativ-** als auch **Signifikanztests** ↗ [MJ 3](#) eindeutig möglich. Im Allgemeinen ist der (größtmögliche) Fehler 1. Art als Signifikanzniveau α vorgegeben.

Die eindeutige **Berechnung des Fehlers 2. Art** ↗ [MJ 5](#) ist nur bei **Alternativtests** ↗ [MJ 3](#) möglich.

Merkzettel J 5:

Fehler 1. Art und 2. Art berechnen ↗ MJ 4

Berechnen der Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art:

Mit dieser Wahrscheinlichkeit wird die in Wirklichkeit *wahre Nullhypothese* irrtümlich *abgelehnt*.

$$\alpha = P(\overline{A}_{p_0}) = B_{n;p_0}(\overline{A}) = 1 - B_{n;p_0}(A)$$

Berechnen der Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art:

Mit dieser Wahrscheinlichkeit wird die in Wirklichkeit *falsche Nullhypothese* irrtümlich *nicht abgelehnt*.

$$\beta = P(A_{p_1}) = B_{n;p_1}(A) = 1 - B_{n;p_1}(\overline{A})$$


Bei einem „normalen“ **Signifikanztest** ↗ MJ 3 kann ein möglicher Fehler 2. Art berechnet werden, indem ein konkreter Wahrscheinlichkeitswert aus $p < p_0$ bzw. $p > p_0$ gewählt wird, der den zum bearbeiteten Sachverhalt gegebenen Randinformationen am ehesten entspricht.

Merkzettel J 6:

Signifikanztest einer Hypothese für unbekanntes p vornehmen

Signifikanztest („normaler“ Signifikanztest)


Signifikanzniveau α i. Allg. vorgegeben (gelegentlich „indirekte“ Vorgabe durch gegebenen Ablehnungsbereich \bar{A} / Annahmebereich A); wegen fehlender Spezifikation von H_1 kann der Fehler 2. Art nicht eindeutig berechnet werden

- (1) **zweiseitiger Test** (sowohl kleine als auch große Werte von X sprechen gegen H_0)  MJ 3

Nullhypothese $H_0: p = p_0$ [Gegenhypothese: $H_1: p \neq p_0$]

zweiseitiger Ablehnungsbereich für H_0 :


$$\bar{A} = \{0; 1; \dots; k_1\} \cup \{k_2; \dots; n\} \text{ mit } B_{n; p_0}(\bar{A}) \leq \alpha; \text{ d. h. } B_{n; p_0}(\{0; \dots; k_1\}) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ und } B_{n; p_0}(\{k_2; \dots; n\}) \leq \frac{\alpha}{2}$$

- (2) einseitig **rechtsseitiger Test** (große Werte von X sprechen gegen H_0)  MJ 3

Nullhypothese $H_0: p \leq p_0$ [Gegenhypothese: $H_1: p > p_0$]

rechtsseitiger Ablehnungsbereich für H_0 :

$$\bar{A} = \{k; k+1; \dots; n\} \text{ mit } B_{n; p}(\bar{A}) \leq B_{n; p_0}(\bar{A}) \leq \alpha; B_{n; p_0}(\{0; 1; \dots; k-1\}) \geq 1 - \alpha$$

- (3) einseitig **linksseitiger Test** (kleine Werte von X sprechen gegen H_0)  MJ 3

Nullhypothese $H_0: p \geq p_0$ [Gegenhypothese: $H_1: p < p_0$]

linksseitiger Ablehnungsbereich für H_0 :

$$\bar{A} = \{0; 1; \dots; k\} \text{ mit } B_{n; p}(\bar{A}) \leq B_{n; p_0}(\bar{A}) \leq \alpha; B_{n; p_0}(\{0; 1; \dots; k\}) \leq \alpha$$

Merkzettel J 7:

Alternativtest einer Hypothese für unbekanntes p vornehmen

Alternativtest („besonderer“ Signifikanztest)

Ablehnungsbereich \bar{A} / Annahmebereich A oder Signifikanzniveau α vorgegeben

Nullhypothese $H_0: p = p_0$ Gegenhypothese/Alternativhypothese $H_1: p = p_1$

- einseitig **rechtsseitiger Test** ($p_0 < p_1$; große Werte von X sprechen gegen H_0)

↗ MJ 3

Ablehnungsbereich für H_0 : $\bar{A} = \{k; k + 1; \dots; n\}$; $B_{n; p_0}(\{0; 1; \dots; k - 1\}) \geq 1 - \alpha$

↗ MJ 3

- einseitig **linksseitiger Test** ($p_0 > p_1$; kleine Werte von X sprechen gegen H_0)

↗ MJ 3

Ablehnungsbereich für H_0 : $\bar{A} = \{0; 1; \dots; k\}$; $B_{n; p_0}(\{0; 1; \dots; k\}) \leq \alpha$

Wahrscheinlichkeit für den **Fehler 1. Art** (α -Fehler; Signifikanzniveau α): $B_{n; p_0}(\bar{A})$

↗ MJ 5

Wahrscheinlichkeit für den **Fehler 2. Art** (β -Fehler): $B_{n; p_1}(A)$

↗ MJ 5

Merkzettel MJ 8:

Signifikanztest durchführen (praktische Vorgehensweise)

Praktisches Vorgehen bei Signifikanztests:

↗ MJ 6

↗ MJ 7

- (1) Nullhypothese H_0 (und Gegenhypothese H_1) mit dem Ziel aufstellen, H_0 mit einer kleinen Irrtumswahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art) abzulehnen
- (2) eine geeignete Zufallsgröße (Testgröße/Prüfgröße) X wählen, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist
- (3) Signifikanzniveau α , Stichprobenumfang n wählen; Ablehnungsbereich \bar{A} bestimmen
- (4) Stichprobe ziehen, konkreten Wert x der Zufallsgröße (Testgröße/Prüfgröße) ermitteln und Entscheidung treffen:
 - a) H_0 wird abgelehnt (verworfen) mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens α , falls $x \in \bar{A}$.
 - b) H_0 wird nicht abgelehnt (nicht verworfen), falls $x \in A$; die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ist meist unbekannt. Deshalb auch die Sprechweise: Aufgrund der vorliegenden Daten ist gegen H_0 nichts einzuwenden.

Vorbemerkungen

Die nachfolgenden *Merkzettel* bieten in *prägnanter, übersichtlicher Form* einen extrem verdichteten Extrakt von *solchen* Lehrbuchpassagen aller 9 Lehrbuchkapitel an, in denen die Vorgehensweise beim Lösen bestimmter Standardprobleme erarbeitet wird. Sie sind also **nicht als Zusammenfassungen**, sondern vielmehr im guten Sinne als „Rezepte“ zu verstehen, die an das im Unterricht (bzw. im Lehrbuch) ausführlich Erarbeitete gleichsam *erinnern*, ohne noch einmal die „Theorie“ zu rekapitulieren, ohne Beispiele zu nennen, ohne (alle) Voraussetzungen oder Nebenbedingungen aufzuführen usw. Es geht um Denkanstöße, die sich entsprechend individuellen Bedürfnissen schnell ergänzen, vor allem aber ausdrucken und als (auch „physisch“) leicht handhabbare Basis z. B. für die Vorbereitung auf Prüfungen, auf eine Klausur usw. verwenden lassen.

Obwohl bereits jetzt die Anzahl der *Merkzettel* ziemlich groß ist, sind bei aller angestrebter Beschränkung gewiss noch solche Ergänzungen erforderlich oder zumindest wünschenswert. Auch bringt es die bewusst gewählte Knappheit der Darstellungen mit sich, dass auf manches verzichtet, anderes nur angedeutet oder am Rande erwähnt ist, was bei „strengerem“ Herangehen vielleicht einer stärkeren Betonung bedurft hätte. In dieser Hinsicht muss der Nutzer – ob er nun Lehrender oder Lernender ist – selbst entscheiden, welche Veränderungen er vornehmen möchte, welche Varianten Aufnahme finden sollten, welche zusätzlichen Verweise oder Querbezüge nützlich sind usw.

Die technischen Möglichkeiten der CD-ROM bieten alle Voraussetzungen, um auch die *Merkzettel* noch besser auf die persönlichen Erwartungen und Ansprüche abzustimmen:

Links erlauben es,

- von bestimmten Begriffen, Sätzen, Beispielen, Textpassagen usw. der PDF-Fassung des Lehrbuchs (dort blau hervorgehoben) oder von dem Merkzettelnamen (in der linken Randleiste des Inhaltsverzeichnisses zum vorliegenden Abschnitt) aus unkompliziert zu den entsprechenden *Merkzetteln* zu gelangen sowie
- von den mit „↗“ gekennzeichneten Stellen der *Merkzettel* aus auf andere „Hilfsmerkzettel“ oder ausführlicher erläuternde Lehrbuchpassagen „umzuschalten“
- von den PDF-Versionen der Merkzettel aus über das Word-Symbol neben der Überschrift zur entsprechenden Word-Version des Merkzettels zu gelangen. Dort bietet sich dem Nutzer die Möglichkeit, die Merkzettel nach eigenem Ermessen zu verändern oder weitergehend zu nutzen.

Merkzettel MH 21:

Zwei Ereignisse A, B auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen / stochastische Unabhängigkeit nutzen

(↗ Lehrbuch, S.396)

- Definition:

$$P_B(A) = P(A)$$

$$P_A(B) = P(B)$$

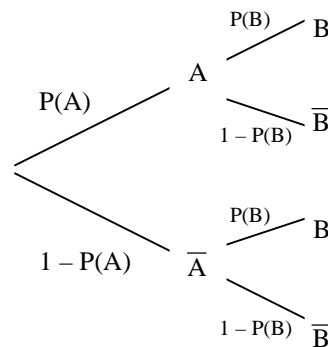
- Vereinfachung in der Vierfeldertafel:

(↗ MH 7)

	B	\bar{B}	
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot (1 - P(B))$	$P(A)$
\bar{A}	$(1 - P(A)) \cdot P(B)$	$(1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$	$1 - P(A)$
	$P(B)$	$1 - P(B)$	

- Vereinfachung im Baumdiagramm:

(↗ MH 7)



- Vereinfachung von Rechenregeln:

(↗ MH 17)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

spezieller Multiplikationssatz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Spezialfall des Additionssatzes

- Verallgemeinerung:

A, B, C sind paarweise (stochastisch) unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ und}$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \text{ und}$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C).$$

A, B, C sind (stochastisch) unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ und}$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \text{ und}$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \text{ und}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

- Anwendung: BERNOULLI-Ketten (↗ Lehrbuch, S. 415)

Zentraler Grenzwertsatz (↗ Lehrbuch, S. 438)